

はじめに

1980年代初頭以降、米国の学校数学カリキュラムの主眼は、問題解決、推論および批判的思考に置かれており、世界の大半もこれに追随している。実際、早くも1977年には全米数学監督者評議会が「問題解決の力を身につけることこそ数学学習の第一の目的である」と言明していた。そもそも、何かのやり方（代数の解き方とか）を知ったところで、いつ使えばいいのかわからなければ何の役にも立たないだろう。問題解決を巡る動きは勢いを増し、数学学習の大部分に広がるまでになり、ひいては日常生活にまで波及してきた。人は日々解決すべき問題に直面する。それは、今日は何を着ようかといったいたって単純なものから複雑なものまでさまざまだ。例えば通りを横断するというような単純そうな問題であっても、車両の通行区分が左右逆になる国に行くと複雑になり、ちゃんと考えなければならなくなることもある。

さて、問題解決について話を始める前に、まず問題とは何かを定めておこう。問題とは、目の前にある解決すべき状況で、答えに至る道筋がすぐには見えないものをいう。この「答えに至る道筋がすぐには見えない」という部分に注意してもらいたい。何しろ我々の多くが米国の学校で解いていた問題は、「タイプ別に分類されている」ことが多かった。つまり、「年齢に関する問題」を解くにはある手順が、「速さ・時間・距離に関する問題」にはまた別の手順が、「混合物に関する問題」、「液量に関する問題」などにはそれぞれ特定の方法が用いられていた。もっと言えば、型にはまった方法を覚えてしまった後では、こうした問題は問題解決の本当の意味からするともう問題で

すらなかった。問題の種類を認識して、それに合った方法を当てはめて機械的に解いていくだけでよかったのである。

数学の成果の歴史はブレイクスルーに満ちており、それらは「そんなアプローチは考えてもみなかった」という驚きをしばしばもたらした。今日でも、問題に対して巧みな解法やエレガントな解法が示されると、多くの人は同様の反応を示す。問題解決が目指すのは、こうしたほかとは異なる解法をアクセス可能な問題解決の知識ベースに組み込むことである。

今日の問題解決は、主としてジョージ・ポリヤ (George Polya) の発見的モデルを基礎としている。このモデルは、1945年に出版され現在も入手可能な彼の著書、*How to Solve It*¹⁾の中で展開されたものだ。この本の中でポリヤが示したのは、

- (1) 問題を理解する
- (2) 計画を立てる
- (3) 計画を実行する
- (4) 振り返る

という問題解決の4つのステップである。

現在の問題解決モデルの大部分はこの4段階の発見的モデルに基づいている。このモデルには通常、(1) 問題を読むこと、(2) 適切なストラテジーを選ぶこと、(3) 問題を解くこと、(4) 解法を振り返るまたはそれについてよく考えることが含まれる。用いる言葉は違っていても、考え方は同じである。このプロセス全体の鍵となるのは、適切なストラテジーを選ぶこと、すなわち問題にどう取り組むかを決定することだ。この重要なステップを詳しく見ていくために本書は作成された。

適切なストラテジーの選択が鍵だということは今述べたとおりである。過去数十年の間に、さまざまな著者がいくつもの違ったストラテジーについて書いたり、それらを提示したりしているが、その多くには共通する要素がある。本書では、問題解決に最も役立つと思われるストラテジーを10取り

¹⁾ (訳注) 邦訳は『いかにして問題をとくか』(柿内賢信 訳, 丸善, 1975年)。ISBN-13: 978-4-621-04593-0。

上げ、それぞれに1章ずつ割いて見ていくことにした。各章で出す問題に対し、まずはすぐに思いつくありがちなアプローチを示すようにした。ほとんどの場合そのアプローチで正しい答えにたどり着くだろうが、ややこしい代数を多用したり、難しい計算をしたりしなければならぬことが多く、時には正解が得られないこともある。

次に、エレガントで模範的な解法を提案し、その章で注目する問題解決のストラテジーを使うとどのように答えが導かれるかを実際に示した。ここで留意すべきは、我々が「答え」と「解法」を区別していることである。解法とは、問題を読み始める時点から、最終的な答えにたどり着きそれについてよく考えるまでのプロセス全体を指す。答えそのものは解法の要素の中でも重要性が最も低い部類に入るという見方がある。それはそのとおりだが、答えに至った過程は解法の極めて重要な要素である。

本書に目を通す際には（できれば問題にも取り組んでもらいたいものだが）、問題を解くために複数のストラテジーが併用されることがよくあるという点に注意してほしい。例えば、知的に推測し検証するストラテジーを用いる場合、通常データを整理するストラテジーも必要となる。こうした複数のストラテジーが用いられる問題は、よりふさわしいと思われる章を選んで出題した。

各章では、まず冒頭で個々のストラテジーについて説明し、日常生活ではそれがどういった場面で使われているかを示してから、数学における適用例を見ていく。続いて、各ストラテジーを使うことでうまく解決できる一連の問題を提示して、ストラテジーの使い方を例示する。本書で取り上げるストラテジーは以下のとおりである。

1. 論理的に推論する
2. パターンを認識する
3. 逆向きに考える
4. 視点を変える
5. 極端な場合を考える
6. 単純化した問題を解く
7. データを整理する

8. 図で視覚的に表現する
9. すべての可能性を網羅する
10. 知的に推測し検証する

先にも触れたように、問題を解く方法が1つしかないなんてことはまずない。我々が示した模範的解法は一例であって、決して唯一のものではない。読者には、ちょっと変わっていておもしろそうな別解をぜひ見つけてみてほしい。それができたら素晴らしいことだ。なお、2種類以上のストラテジーを組み合わせることで、程度の差はあれ効率がよくなる場合があるだろう。

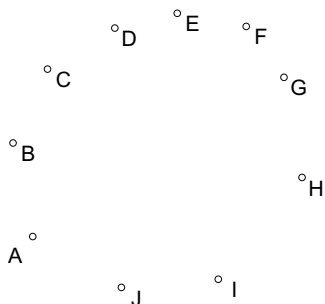
ある問題に対して種々のストラテジーを用いてどのようにアプローチできるか（そしてどのように解けるか）を示すために、ここで1つよく知られている問題を出して、それに対する解法をいくつか紹介しよう。

問題

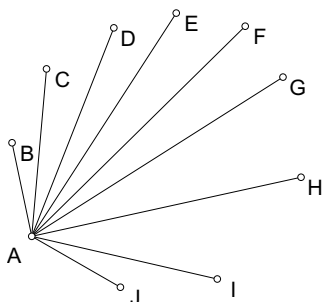
部屋にいる10人全員がそれぞれほかの全員と1回ずつ握手したら、握手の回数は全部で何回になるか。

解法 1

図を描いて視覚的に表現するストラテジーを使ってみよう。下の10個の点は（どの3点も同一直線上に並ばないように描かれていて）、部屋にいる10人を表している。点Aから見ていこう。



A とほかの 9 個の点をそれぞれ直線で結ぶ. これは最初に握手が 9 回行われることを示している.



次の B の握手の回数は 8 回になる (A と B はもう握手しており, 線分 AB はすでに引かれているからである). 同じく, C から引く直線は 7 本になり (線分 AC と線分 BC はすでに引かれている), D から引く直線は 6 本, すなわち握手は 6 回となって, 以下同様に続く. 点 I までくると, I はすでに A, B, C, D, E, F, G, H と握手をしているので, 残るは 1 回, すなわち I と J の握手だけとなる. したがって, 握手の回数の合計は $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$ と等しい. 一般的には, 初項から第 $(n - 1)$ 項までの自然数の和を求める公式 $\frac{n(n-1)}{2}$ (ここで $n \geq 2$) を使ってこれを求めることもできる. (最終的にこの図はすべての対角線が引かれた十角形になることに注意.)

x はじめに

解法 2

すべての可能性を網羅してこの問題にアプローチすることもできる。下のマス目は、 A, B, C, \dots, H, I, J の人たちが互いに握手をするすべての組合せを表したものである。X が書かれた対角線上のマス目は、自分自身とは握手ができないことを示している。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	X									
B		X								
C			X							
D				X						
E					X					
F						X				
G							X			
H								X		
I									X	
J										X

その他のマス目の数は、部屋で行われる握手の総回数の2倍になっている(つまり、 A と B との握手と B と A との握手が含まれている)。したがって、マス目の総数(10^2)から対角線上のマス目(10)を引き、その答えを2で割れば握手の回数が求められる。この場合、 $\frac{100 - 10}{2} = 45$ となる。

$n \times n$ 個のマス目の場合で考えると、握手の回数は $\frac{n^2 - n}{2}$ となるだろう。

これは上で示した式 $\frac{n(n-1)}{2}$ と等しい.

解法 3

今度は視点を変えて見ていこう. 部屋にいる 10 人がそれぞれほかの 9 人と握手することを考えると, 握手の回数は 10×9 , すなわち 90 回になるように思われる. しかし, (A が B と握手をするときは B が A と握手をするとも考えられるので) 重複している分を除くために 2 で割らなければならない. よって, $\frac{90}{2} = 45$ となる.

解法 4

パターンを探すことによって解いてみよう. 下の表は, 部屋にいる人数の増加に伴う握手の回数を表している.

部屋にいる 人数	新たに増えた人が する握手の回数	部屋で行われる 握手の総回数
1	0	0
2	1	1
3	2	3
4	3	6
5	4	10
6	5	15
7	6	21
8	7	28
9	8	36
10	9	45

握手の総回数を表す第 3 列は, 三角数と呼ばれる数の列となっていて, その階差数列は 1 ずつ増えている. したがって, この数列を単純に続けていけば, 10 人の場合の総回数が見える. 総回数の各値はその値が含まれる行の

xii はじめに

人数と1つ前の行の人数の積の半分になっているというパターンに注意しよう.



解法 5

データを整理する戦略を慎重に用いてアプローチすることができる. 下の表は, 部屋にいる10人それぞれを表す番号と, 各人が自分より前の人たちとはすでに握手して自分自身とは握手しないことを前提とした握手の回数を示している. つまり, 10番の人は9回握手をし, 9番の人は8回握手をし, 以下同様に続く. 2番の人まで来ると, 握手する相手は残り1人となり, 1番の人はもう全員と握手をしてしまったので握手する相手はいない. この場合もやはり合計は45回である.

データ項目										
部屋にいる人の番号	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
握手の回数	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

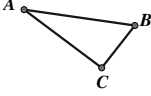
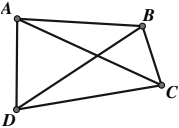
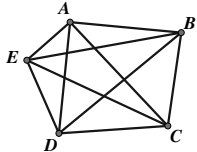
解法 6

単純化した問題を解く戦略を, 視覚的表現 (図を描く), データ整理, パターン探しの戦略と組み合わせることもできる. 1人の人を1つの点で表した図から始めよう. 握手の回数は明らかに0回だ. では人数を2人に増やして点を2つにしよう. すると握手は1回になる. さらに3人に増やそう. 今度は握手は3回になる. 続けて4人, 5人と増やしていこう.

人数	握手の回数	視覚的表現
1	0	
2	1	

(次頁へ続く)

(前頁の続き)

人数	握手の回数	視覚的表現
3	3	
4	6	
5	10	

この問題はもう幾何の問題となっており、答えは「 n 角形」の辺と対角線の数である。したがって、10人の場合には十角形ができるので、辺の数は $n = 10$ である。対角線の数 d は次の式で求めることができる。

$$d = \frac{n(n-3)}{2} \quad (\text{ここで } n > 3)$$

$$d = \frac{10 \cdot 7}{2} = 35$$

よって、握手の回数 $= 10 + 35 = 45$ である。

解法 7

もちろん読者の中には、10個の中から2個を同時に選ぶ組合せの式を使えばこの問題は簡単に解けるだろうとすぐ気づく人もいるかもしれない。

$${}_{10}C_2 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$$

しかしながら，この解法は実に効率的で，簡潔で，正確である一方，数学的思考を（公式を使う以外）ほとんど用いておらず，問題解決のアプローチ全体を回避してしまっている．この解法は触れておくべきものではあるけれども，ほかの解法を紹介したことによってさまざまなストラテジーを示すことができた．この問題を採用した理由はここにある．

読者には，本書を通読し，問題を解き，すべてのストラテジーについてよく理解することをお勧めする．そうすることで，問題解決プロセスの基本ツールとなる自分だけの問題解決ストラテジーを構築することができる．問題解決を初めて学ぶ人には，本書をきっかけに興味を持ち，数学に欠かせないこの最もおもしろい側面を深く探究してもらえたらと思う．以前から批判的思考と問題解決に関心がある人には，興味を引く目新しい問題が見つかることを願っている．何よりもまずは本書を楽しんでいただきたい．