

はじめに

ソフトウェア工学や計算機科学の分野で「数理論理学」が重要な役割を果たしています。例えば「形式手法」と呼ばれる手法を用いて、自動車産業や人工衛星設計など様々な分野でソフトウェア開発が行われています。この「形式手法」は、しかしながら、何か単独の手法という訳ではなく、数多くの手法の総称で、それぞれの手法において数理論理学が用いられているというのが現状です。例えば NASA で 2009 年から毎年開催されている Formal Method Symposium の 2016 年の大会では 16 の分科会がありました。

情報系あるいは工学系の読者で、命題論理や述語論理の基礎の習得を終えた段階、すなわち命題論理式の真理値の計算や量化記号 (\forall や \exists) の意味と性質を理解した段階の読者に、「もうすこし先の数理論理学」を紹介したいという意図で本書を執筆しました。

数理論理学について日本語で書かれた文献は、大きく 2 つのタイプに分類されます。ひとつは、「数学基礎論」と呼ばれる分野からのアプローチです。集合論やモデル理論あるいは理論計算機科学での応用を意識した著書や解説論文です。情報系あるいは工学系の学生あるいは院生にとって必要以上に専門的内容かもしれないと感じています。

もうひとつは、工学的あるいは情報科学的応用を意識した文献で

す。こちらのタイプの著書は多くはありませんし、数理論理学的内容は残念ながらそう高度ではありません。

筆者は「数学基礎論」を専門としていますが、大学教育に長年携わっており、「数学基礎論」を専門としない学生に対して数理論理学を教えてきました。こうした経験から、情報系あるいは工学系の学生に、「もうすこし先の数理論理学」を紹介したいと長年考えてきました。本書の執筆にあたっては、やや高度な内容を、できるだけ分かりやすく説明することを心がけました。どこまで上手く説明できているかに関しては、読者の皆さんの判断にお任せします。

本書の構成を簡単に説明します。第1章は命題論理についての解説です。応用上は、論理関数や論理回路の方が重要かもしれませんが、例えば論理回路を設計する場合も命題論理の基礎知識があれば大変重宝します。工学的あるいは情報科学的応用を意識した著書では、通常無限個の論理式の集合は扱いませんが、すこし理論的議論を知って欲しくて「コンパクト性定理」について解説しました。

第2章は、述語論理についてです。冠頭標準形とスコーレム標準形と呼ばれる2種類の標準形に関する解説が中心です。また量化記号 \forall と \exists の組み合わせに関して、 $\forall\exists$ と $\exists\forall$ の違いの理解に困難を覚えている学生が多いと常々感じていますので、連続性と一様連続性を例にしてすこし詳しく解説しました。

第3章は、チューリング機械についてです。チューリングの原論文が書かれたのは今から80年ほど前です。彼の発想や問題意識について学ぶには原論文を読むことが最善です。現代の記法とは異なるため読みやすくはありませんが、インターネットで簡単にチューリングの原論文が入手できます。是非一読をお勧めします。万能チューリング機械や停止問題の決定不能性についても簡単に解説しました。

第4章は、命題論理の充足可能性問題についてです。命題論理

式が充足可能かどうかを判定することは、理論上は決定可能です。真理値表を書いて充足可能かどうかを判定できるからです。しかし、命題変数の個数が増えると、充足可能性を判定するために必要な計算量は指数関数的に増大します。この章では、充足可能性の判定が NP 完全であることを説明した後、実用上重要な DPLL アルゴリズムと Wang のアルゴリズムについて説明しました。

第 5 章は、述語論理の証明可能性の判定が決定不能であることの解説です。チャーチの λ -計算に関する議論を紹介します。チューリング機械同様「計算とは何か」について考察する場合に必須となる概念の一つです。ついで、述語論理の問題を命題論理の問題に帰着するエルブランの発想を解説しました。

第 6 章は、ブール代数についてです。ブール代数に関する解説は多く存在しますが、ここでは工学系あるいは情報系のアプローチからの多くの著書で解説されている内容よりかなり高度な内容まで解説しました。ブール代数を規定する公理系の個数はどこまで減らすことができるかという問題は、長年研究者の興味を惹きつけてきました。自動証明の手法を用いて、1 個の等式によってブール代数が規定できる段階までついに到達しました。人工知能による数学の問題の証明という観点からも興味深いテーマです。

第 7 章は、形式手法において数理論理学がどのように使われているか、現状の一端を紹介します。ソフトウェアあるいはハードウェアのシステム開発に数学的手法を用いる第一歩は、当然ながら扱う対象をどのように数学的に表現するかです。本書では「移行システム」という考え方を解説します。複雑なシステムを、様々な状態が時系列的に移行するシステムとして捉えるという考え方です。この「移行システム」を記述するという観点からオートマトンや様相論理および時相論理について基礎的な考え方を解説しました。

以上、本書の構成を簡単に説明しました。はじめに書きました

が、工学系あるいは情報系の専門分野の学生・院生あるいは研究者に「もうすこし先の数理論理学」を紹介したいという意図で本書を書きました。さらに高度な内容については、それぞれの分野のより専門的な著書あるいは論文で学んで下さい。より多くの学生・院生あるいは研究者が「もうすこし先の数理論理学」について興味を持ってもらえることを願っています。

最後になりましたが、本書の執筆を勧めてくださった編集委員の飯高茂先生、桑田孝泰先生そして原稿執筆が大変遅れたにも拘わらず辛抱強く待って下さった共立出版編集部の三浦拓馬さんには心より感謝申し上げます。

2017年7月

板井昌典