

はじめに

様々な数学的な概念を、具体的に数値を計算するという立場から研究する分野を数値解析と言う。本書は、大学の1年および2年次に学ぶ微分積分学や線形代数学に現れる諸問題を対象にした、数値解析の入門書である。

なぜ数値解析を学ぶ必要があるのだろうか？ 微分積分学の講義では、 $\sqrt{\pi}e^{-\sqrt{17}}$ や $\log|\sin x|$ が計算の答えとなり得た。また、線形代数学の講義では、 A が正則行列ならば連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解は $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ であることを教わった。しかし、ひとたび数学の講義を離れて、自然科学の問題としてこれらの間に直面した際には、 $\sqrt{\pi}e^{-\sqrt{17}}$ 、 $\log|\sin x|$ 、 \mathbf{x} の具体的な数値が必要になる。数値解析を学ぶことによって、私たちは、そのための具体的な方法を知り、活用できるようになるのである。また、それは「何が数学的な答えなのか」についての根本的な意識改革を行うことに他ならない。一方で、数値解析を通じて、例えば、数列の収束というありふれた数学的な概念の中に、さらに、収束の速さや計算の量という新しい問題が潜んでいることを学ぶ。すなわち、一つの理解が、多くの新しい問をもたらすという数学の広がりを実体験することになるのである。

数値解析はコンピュータの利用を前提としているが、決して新しい分野ではない。実際、本書では、ニュートン、ガウス、ラグランジュなどの多くの大数学者の名前が出てくるが、彼らも数値解析の問題に取り組んでいたのである。コンピュータという新しい技術は、数値解析の可能性を爆発的にひろげ、現代の科学技術の基礎を支えている。とはいえ、コンピュータにもできることとできないことがある。昔からある問題を新しい技術でどう解決するのかを研究する

のは数値解析の醍醐味である。

現在、多くの大学で数値解析の入門講義が行われている。しかし、時間などの制約により、その多くはプログラミング演習の形式をとっているようである。言うまでもなく、プログラミングは重要である。したがって、従来の数値解析教育では、プログラミング技術の修得に時間をかけざるを得なく、結果的に、目標を、プログラムを正しく動かすことにおきがちであった。しかし、幸いにして、最近では、数学的表現をほぼそのまま処理して答えを出してくれるソフトウェアが気軽に利用できるようになった。そのような道具を利用することで、従来、プログラミングにかけていた時間を節約し、数値解析の背後にある数理を理解することに時間をかけることができる。これが本書の目標である。そのために、計算方法や公式を、“天下りの”に述べるのではなく、動機を明確にした上で、導出を丁寧に述べるよう注意した。現実問題の解決に役立つ数学的な知識は、最先端の鮮やかな理論ばかりでなく、根本的で単純なアイデアであることも多い。本書の立場は、基礎を大切に学習することで、応用を志向するものである。

本書の執筆の機会を与えてくださった「共立講座・数学探検」の編集委員の先生方と共立出版の編集制作部の皆様には、あらためてお礼を申し上げたい。原稿の執筆をお受けしてから、実際に原稿が完成するまで、かなりの時間がかかってしまった。共立出版の編集制作部の皆様には、何度も締め切りの延長を許していただいた。この点についても、お詫びとお礼を申し上げる。

第5章の内容について尾崎克久さんから、また、本書の内容全般に関して匿名の二名の査読者から、有益な意見を頂いた。ご協力に感謝したい。また、本書で紹介する計算例は、筆者が東京大学で担当した講義のTAとの討議に基づいて作ったものが多い。過去にTAを務めてくれた佐々木多希子、榊原航也、杉谷宜紀、上田祐暉、剣持智哉、千葉悠喜の皆さんにもお礼を申し上げたい。

2016年8月

齊藤 宣一

計算例について

本書で紹介する計算例は、筆者が

MacBook Pro (プロセッサ : 3.1 GHz Intel Core i7, メモリ : 16 GB 1867 MHz DDR3, OS : Mac OS Yosemite)

において数値計算ソフト Scilab (Ver. 5.5.2, <http://www.scilab.org/>) を用いて行ったものである。その際に使用したプログラムを、使い方とともに、

数値解析 (共立出版) サポートページ

<http://www.infsup.jp/na/>

に公開する。本書を読んで終わりにするのではなく、**ぜひ、自分のコンピュータで計算を実体験してほしい**。特に、パラメータを変更して、自分の例を計算することは、大きな財産になる。実際、本書では様々な数値計算方法とその数学的理論を解説するが、具体的な計算例の検討は、数学理論の真意や役割、そして限界を知るために重要である。

Scilab はサイラボと読む。Scilab は、フランス国立情報学自動制御研究所 (INRIA, <http://www.inria.fr/>) で開発されているオープンソースの数値計算システムである。フリーソフトで、インストールも容易であり使いやすい。また、Scilab は、MATLAB (<http://jp.mathworks.com/products/matlab/>) という数値計算システムと非常によく似ており、移行は容易である。

問題について

各章末にある問題の多くは、読者自身がコンピュータを用いて計算することを前提としている。計算例で用いたプログラムを参考にし、修正するなどして、自分で計算に挑戦してほしい。