

# 目 次

<b>第Ⅰ部 前 奏</b> .....	1
第1章 本書について .....	3
1. 数学について思考する子ども .....	4
2. 数学的思考の長期発達 .....	5
3. 理論枠組み .....	8
4. 概念と過程の両方を表す記号 .....	12
5. 知識圧縮 .....	13
6. 数学三世界 .....	15
7. 我々が持つ能力 .....	19
8. 経験に基づく知識 .....	20
9. 「生まれつき備わっていること」と「以前にみたこと」 .....	21
10. 知識構造の結びつき .....	22
11. 数学学習の情意的側面 .....	24
12. 結晶概念 .....	25
13. 簡単な概観 .....	26
<b>第Ⅱ部 学校数学の背後にある論理とその因果性</b> .....	27
第2章 数学的思考の基盤 .....	29
1. 言 語 .....	31
2. 図形の初期経験 .....	32
3. 意識的思考の3つのレベル .....	35
4. 幼児期の数概念 .....	36

5. 計算の初期段階	37
6. 過程と概念としての記号	41
7. 結晶概念としてのプロセプト	43
8. 算術の成果における相違	44
9. 振り返り	45
第3章 数学的思考の圧縮化・結びつけ・融合化	47
1. 思考可能概念への圧縮化	47
2. カテゴリー化	48
3. カプセル化	59
4. 定義づけ	70
5. 思考可能概念と知識構造	78
6. 要 約	82
第4章 生得的構造・経験的構造・長期学習	83
1. 生得的構造の概念	84
2. 経験的構造	87
3. 支持的概念と問題提起の概念	115
4. 要 約	118
第5章 数学と情意	119
1. 用具的理解と関係的理解	119
2. スケンプの目標と反目標の理論	120
3. 数学不安	123
4. 一般化と拡張による融合	129
5. 支持的概念と問題提起の概念	130
6. 目標と成功	131
7. 結 び	132
第6章 数学三世界	133
1. 数学三世界	133
2. 具 象	134
3. 概念的具象世界	141
4. 具象化から操作的記号化への移行	142

5. 公理的形式世界	150
6. これまでの話	155
第7章 具象世界と記号世界を通る旅	157
1. 知識構造の圧縮	158
2. 具象世界における高まっていく複雑さ	166
3. 帰 結	175
4. 具象世界、記号世界、そして形式世界の長期的な発展	176
第8章 問題解決と証明	179
1. 問題解決	180
2. 授業研究	188
3. 証明についての思考	192
4. 形式的証明	207
<b>第Ⅲ部 間 奏</b>	<b>221</b>
第9章 数学の歴史的進化	223
1. 記数法の発展と初等算術	224
2. 幾何学と証明の発展	234
3. 代数学の発展	240
4. 代数学と幾何学を繋ぐ	245
5. 微積分	248
6. 複素数の意味づけ	248
7. 現代の形式主義的数学の誕生	252
8. コンピュータの役割	264
9. 要 約	266
<b>第Ⅳ部 大学数学とその先</b>	<b>269</b>
第10章 形式的知識への移行	271
1. 具象世界および記号世界から形式世界への主要な革新	271
2. 集合と関係	272

3. 実数と極限	281
4. 自然なアプローチと形式的アプローチ	291
5. 理論枠組みの比較	298
6. さらに大きな図	304
7. 考 察	305
第 11 章 微積分に見る考えの融合	307
1. 微積分概念の起源	309
2. 微積分指導の問題点	313
3. 微積分への局所直線アプローチ	317
4. ライプニッツの再訪	325
5. 媒介変数関数	327
6. 合成関数と連鎖律	329
7. 逆関数	331
8. 極限概念の導入	332
9. 動的に具象化された連続から形式的な定義へ	337
10. 連続なグラフ下での面積	342
11. 微分方程式	349
12. 偏微分	352
13. 具象化と記号化の関係	354
14. 省 察	356
第 12 章 数学者の思考法と構造定理群	359
1. 初学者と専門家の比較	361
2. 証明過程と真であることの保証	362
3. 構造定理群および具象世界と記号世界の新形式	368
4. 選択と帰結	377
5. 新たな組織化原理	379
第 13 章 無限小を熟考する	385
1. 無限大と無限小に対する対照的信念	387
2. 無限小を含む順序体	389
3. 無限小を用いる微積分学	398

4. 超実数を作る	403
5. 教育上の帰結と局所直線性	407
6. 微分可能な関数を拡大する	408
第14章 数学研究におけるフロンティアの拡大	411
1. 問題の解決と定理の証明	411
2. 形式世界における数学的理論の多様性	414
3. 幾何学と代数学の発展の対比	419
第15章 回 想	429
1. 理論全体を見る	429
2. 数学における思考可能概念の発達	430
3. 数学三世界を通じた人々の旅	432
4. 通用する内容と通用しない内容に関連する情意	434
5. 拡張的融合	435
6. 理論枠組みの発展：通用する内容と通用しない内容	437
7. 指導への示唆	441
8. 理性的思考	442
結 語	443
付録 本書の着想の出所	445
引用文献	455
解説	471
監訳者あとがき	477
事項索引	479
人名索引	490