

# はじめに

今年 2016 年は、リーマン (1826-1866) が亡くなって 150 年となる。本書では、リーマンと数論のかかわりを述べる。数論に関してリーマンの書いた論文はゼータ関数論の一編のみであるが、それは 1859 年のリーマン予想を提出した論文であり、数学世界に与えた影響の大きさは万巻の数学書に価すると言える。

本書は、

第Ⅰ部 (第 1 章, 第 2 章, 第 3 章) 「簡単なゼータ関数」

第Ⅱ部 (第 4 章, 第 5 章, 第 6 章) 「リーマンと先達」

第Ⅲ部 (第 7 章, 第 8 章, 第 9 章) 「リーマンの影響」

という三部から成る。

第Ⅰ部では、まず、ゼータ関数とはどんなものかを簡単な場合に体験していただく。単純なものではあるが、関数等式もリーマン予想も証明される。それらは本来のリーマン予想の解決にも重要となるであろう。そのような未来を考慮した結果、ここに取り上げるゼータ関数は通常の入門コースとは全く違ったものとなった。

第Ⅱ部は、リーマンの数論研究およびリーマンに至る数学の流れについて解説する。リーマンの画期的なところは、ゼータ関数を複素関数論から扱ったところにある。その結果、ゼータ関数の複素零点が素数分布と深く関係していることを発見したのであり、リーマン予想にも至ったのである。

第Ⅲ部では、リーマンのゼータ関数論の 19 世紀, 20 世紀, 21 世紀における影響を述べる。とくに、リーマン予想の証明されている二大ゼータ関数族である「セルバークゼータ関数」と「合同ゼータ関数」について解説する。前者は、リーマン面やリーマン多様体のゼータ関数であり、20 世紀中頃にセルバークが発見した。まさに、リーマンの研究していた空間に関するゼータ関数である。しかも、リーマン予想の成立まで確認できることは、リーマンの「空間論・多様体

論」と「ゼータ関数論・リーマン予想論」という二つの研究が百年後に合流した  
ものとして感銘深い。後者は、有限体上の代数多様体やスキームのゼータ関数で  
あり、20世紀にグロタンディークが中心となって膨大な研究が行われた。これ  
は、リーマンが示唆していた「離散多様体」のゼータ関数と見ることができるで  
あろう。実は、前者のセルバーグゼータ関数においても「離散版」を考えること  
ができて、それはグラフのゼータ関数などとなる。

このような、ゼータ関数論の多方面にわたる発展は、リーマン予想を中心とす  
るリーマンの研究から流れてきたものである。

幸いなことに、本来のリーマン予想は、1859年に提出されて以来157年にな  
る現在まで未解決である。21世紀においても導きの糸になることを期待したい。

2016年10月20日

黒川信重