翻訳ノート

小林欣吾・佐藤 創 共同執筆

2016 年 12 月 13 日 現在

以下で，訳書とは,『数学ゲームの必勝法』, 共立出版,2016 を指し，原著とは，“ Winning Ways for Your Mathematical Plays,” 2nd edition, A K Peters, 2001（4 巻本）を指す.

1　翻訳ノート vol.1

1.1　第 1 章

訳書 p.4（原著 p.2) 言葉遊び

「2 人のプレーヤーを**左手** (Left)，**右手** (Right) と呼ぼう．左手の手は任意の青 (bLue) 辺を 1 本除くことであり，同時に，そのことで地表（図では点線で描かれている直線）から離れてしまう辺も丸ごと除いてしまう．右手の手は任意の赤 (Red) 辺を 1 本除くことが違うだけである.」

この箇所の原文は,

‘We shall call the two players **Left** and **Right**. Left moves by deleting any bLue edge, together with any edges that are no longer connected to the ground (which is the dotted line in the figure), and Right moves by deleting a Red edge in a similar way.’
である．見てわかる通り，ここで著者たちは Left と bLue, Right と Red で言葉遊びをしている.「左手」と「青辺」,「右手」と「赤辺」の訳ではこの駄洒落は伝えきれない.

訳書 p.18（原著 p.15）共通ゲームと個別ゲーム

impartial game, partizan game の訳には少なからず頭を悩ませた．不偏ゲーム，党派ゲームなども考えられたが，どうもしっくりしない．ある局面を前にしたとき，打てる手がどちらのプレーヤーにとっても同じ場合を impartial と呼び，異なる場合を partizan と呼んでいる．ことにパルチザンは日本では抵抗運動を想起させるので，そのまま使うのは不都合な感じもする．というわけで，impartial game を選択肢共通ゲーム，partizan game を選択肢個別ゲームの訳で通すこととした．このままでは冗長なので短く，共通ゲーム，個別ゲームと簡略化して呼ぶことも決めた.

1.2　第 2 章

訳書 p.26（原著 p.22) 単純ルール

単純ルールはよく味わっておく必要がある．p.29 で示されている 2 進分数を使って数を表すとき，その選択肢のいずれもが適合していない数を最も単純な数と定義している．だから例えば，$\{0|6\}$ を考えると，1, 2, 3, 4, 5 などは適合しているが，それらは $1 = \{0|\ \}, 2 = \{1|\ \}, 3 = \{2|\ \}, 4 = \{3|\ \}, 5 = \{4|\ \}$ であり，$1 = \{0|\ \}$ の 0 以外は適合する選択肢 (1, 2, 3, 4) をもっているので最も単純な数にはなり得ない．というわけで，$\{0|6\} = 1$ となるわけである．もちろん，それ以外にも適合する数はもっとあるが，すべて適合する選択肢をもっているので最も単純な数にはなり得ない．

なお,「単純」の定義は与えられていないが,「最も単純」を一意に決まる何か好ましいものと考えればよい．

訳書 p.29（原著 p.24) 言葉遊び

Lefty と Rita で p.4 と同じ言葉遊びをしている．

訳書 p.34（原著 p.29) 言葉遊び

「どちらのプレーヤーも刈り取ることができる**緑辺**もありうる.」は，原著では ‘there may also be some *grEen* edges, which Either player may chop.’ となっている．ここでも，著者は grEen と Either で楽しんでいる．日本語の「どちらの」と「緑」ではこの駄洒落を伝えきれない．

訳書 p.46（原著 p.40) 図の中の未知の記号

本文中の図で $*2$ という記法はまだ定義が現れて来ていない．p.47 で明らかになる．また，$\uparrow$ という記号は p.73 で説明される．

1.3　第 3 章

訳書 p.61（原著 p.53) 名文の引用

章の冒頭 名文引用部．Nim とは古語で盗むという意味らしい．そんな使い方があるのでこの引用をしたらしいが，ゲームのニムとはまったく関係はないようだ．

訳書 p.64（原著 p.56) mex

最小除外規則 (the minimal-excluded rule) の中で,「ここで，m を $a, b, c, \ldots$ を除く最小の非負整数とする.」と記述したが，原著では where m is the least number 0 or 1 or 2 or ... that is *not* among the numbers $*a, *b, *c, \ldots$. となっている． $*a, *b, *c$ らは heaps を表すはずで，数として見た方が ‘0 or 1 or 2 or ...’ と比較できるので，訳のようにした．

minimal-excluded number とは，0, 1, 2, 3, ⋯ の中から，リストの載っている数 (excluded numbers) を除外した上で残った数の最小値を与えるのが関数 mex である．excluded numbers の最小値ではない（p.123 のノート参照）.

1.4　第4章

訳書 pp.92,101（原著 pp.82,90) ケイルスのニム値

もともとのケイルスのニム値の計算式は p.101 にあるように，

$$\mathcal{G}(n) = \mathrm{mex}(\mathcal{G}(\mathrm{a}) \overset{*}{+} \mathcal{G}(\mathrm{b})) \quad \text{ここで} \quad 0 \le \mathrm{a}, \mathrm{b} \;\; \text{かつ} \;\; \mathrm{a} + \mathrm{b} = \mathrm{n}{-}1 \;\; \textbf{あるいは} \;\; \mathrm{n}{-}2$$

であり，ニム列は

$$\begin{array}{rcccccccccccc} n = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \ldots \\ \mathcal{G}(n) = & 0\,. & 1 & 2 & 3 & 1 & 4 & 3 & 2 & 1 & 4 & \ldots \end{array}$$

となり，図 4.1 で右手が勝てないのは

$$\mathcal{G}(1) \overset{*}{+} \mathcal{G}(7) \overset{*}{+} \mathcal{G}(3) = 1 \overset{*}{+} 2 \overset{*}{+} 3 = 0$$

であることによる．

訳書 p.93（原著 p.83) $\mathcal{P}$ と $\mathcal{N}$

$\mathcal{P}$ 局面とは先手必敗の局面である（直前 Previous のプレーヤーの勝ちとは，いま手番のプレーヤーは負けということである）．$\mathcal{N}$ 局面とは先手必勝の局面である（次 Next のプレーヤーの勝ちとは，いま手番のプレーヤーは勝ちということである）．

訳書 p.94（原著 p.84) n 山

n 山 (n-heap の訳) は n 個の豆で構成されるサイズ n の山を表す．この記法は p.103 の n 山 (n heaps の訳) という言い方と紛らわしい．後者は，n 個の山を意味しており，前者はサイズ n の 1 つの山を意味している．英語では，単数から複数を区別する“ s ”がつくので誤解は生じないが，日本語は不正確になるので紛らわしくなる（ハイフン“ - ”を使う習慣も日本語にはない）．

訳書 p.94（原著 p.84) 引き算ゲーム

引き算ゲーム $S(2,5,6)$ では，なぜ $\mathcal{G}(n)$ は $\mathcal{G}(n{-}9)$ と等しくなることはないかというと，

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(n-9) &= \mathrm{mex}(\mathcal{G}(\mathrm{n}{-}11), \mathcal{G}(\mathrm{n}{-}14), \mathcal{G}(\mathrm{n}{-}15)) \\ &= \mathrm{mex}(\mathcal{G}(\mathrm{n}), \mathcal{G}(\mathrm{n}{-}3), \mathcal{G}(\mathrm{n}{-}4)) \\ &\neq \mathcal{G}(n) \end{aligned}$$

であるから（このゲームのニム列の周期は 11 であった）．

訳書 p.101（原著 p.90) Grundy 計算尺，原著誤り

原著は図 4.7 の右端の描き方が不正確である．滑尺の矢印は固定尺の $n = 174$ の位置を指し示し，$a + b = n - 3 = 171$ であり，滑尺の -1 の位置は固定尺の 172 の位置に，0 の位置は 171 の位置に合うはずである．そのように図を修正した．こうすると，173 の位置は，$51 * 2 + 34 * 2 + 3$ ということで算出されることが明解になる．

「この計算は滑尺を 34 だけ左にシフトして戻したときの $\mathcal{G}(140)$ に対する計算と完全に同じである．ただ，規則的な値のニム和 34 個が重複して繰り返されていることだけが異なる.」したがって，mex をとるときに値は変化しないので，$\mathcal{G}(174) = \mathcal{G}(140)$ となるわけである．

訳書 p.102（原著 p.91) 言葉遊び

図 4.8 の caption は原著では,「Grundy Skayles?」となっていて，Scale 計算尺と Kayles ケイレスを駄洒落で，ケイレス (Kayles) の計算尺 (scaler) を Skayles というのはどうだろう？と言葉を掛けているのである．

訳書 p.104（原著 p.92) Dawson のゲーム

Dawson のゲームは

$$\mathcal{G}(n) = \text{mex}(\mathcal{G}(\text{a}) \overset{*}{+} \mathcal{G}(\text{b}))$$

をみたしており，Dawson のチェス $\cdot\mathbf{137}$ では $\mathcal{G}(-1) = 0$, $\mathcal{G}(0) = 0$, かつ $a + b = n - 3$, $-1 \leq a, b$ であるが，Dawson のケイルス $\cdot\mathbf{07}$ では $\mathcal{G}(0) = 0$, $\mathcal{G}(1) = 0$, かつ $a + b = n - 2$, $0 \leq a, b$ である．また，Dawson のケイルスの変形版 $\cdot\mathbf{17}$ では $\mathcal{G}(0) = 0$, $\mathcal{G}(1) = 1$, かつ $a + b = n - 2$, $0 \leq a, b$ である．

訳書 p.109（原著 p.97) Prim と Dim

Prim^- では，n をたとえば素数 7 とすると，それより小さい coprime（n と互いに素）の数は 2, 3, 4, 5, 6 となり，

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(7) &= \text{mex}(\mathcal{G}(7-2), \mathcal{G}(7-3), \mathcal{G}(7-4), \mathcal{G}(7-5), \mathcal{G}(7-6)) \\
&= \text{mex}(\mathcal{G}(5), \mathcal{G}(4), \mathcal{G}(3), \mathcal{G}(2), \mathcal{G}(1)) \\
&= \text{mex}(3, 1, 2, 1, 0) \\
&= 4
\end{aligned}$$

と計算される．Prim^+ では，

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(7) &= \text{mex}(\mathcal{G}(7-2), \mathcal{G}(7-3), \mathcal{G}(7-4), \mathcal{G}(7-5), \mathcal{G}(7-6)) \\
&= \text{mex}(\mathcal{G}(5), \mathcal{G}(4), \mathcal{G}(3), \mathcal{G}(2), \mathcal{G}(1)) \\
&= \text{mex}(3, 0, 2, 0, 1) \\
&= 4
\end{aligned}$$

となり，同じ値となる．Prim^- で $n = 6$ とすると，それより小さい coprime の数は 5 だけとなり，

$$\mathcal{G}(6) = \text{mex}(\mathcal{G}(6-5)) = \text{mex}(\mathcal{G}(1)) = \text{mex}(0) = 1$$

であり，Prim^+ では

$$\mathcal{G}(6) = \text{mex}(\mathcal{G}(6-5)) = \text{mex}(\mathcal{G}(1)) = \text{mex}(1) = 0$$

となる．

訳書 p.110（原著 p.98) ニム値の重複

引き算ゲーム $S(4,10,12)$ は

$$\mathcal{G}(n) = \mathrm{mex}(\mathcal{G}(\mathrm{n}-4), \mathcal{G}(\mathrm{n}-10), \mathcal{G}(\mathrm{n}-12))$$

で，$\mathcal{G}(0) = \mathcal{G}(1) = \mathcal{G}(2) = \mathcal{G}(3) = 0$ を初期条件とする．このゲームは $\cdot$**000300000303** と表記される．引き算ゲーム $S(2,5,6)$ は

$$\mathcal{G}(n) = \mathrm{mex}(\mathcal{G}(\mathrm{n}-2), \mathcal{G}(\mathrm{n}-5), \mathcal{G}(\mathrm{n}-6))$$

で，$\mathcal{G}(0) = \mathcal{G}(1) = 0$ を初期条件とする．このゲームは $\cdot$**030033** と表記される．

上記の引き算ゲームの符号数字には 0 と 3 しか現れない．それに対して，次に話題にされるゲームは 0 と 7 しか現れない．この例題の切り替えは少々唐突で混乱を起こさせるものである．たとえば，ケイレスの $\cdot$**77** の 2 重複は $\cdot$**077** となっており，そのニム列は

$$0.011223311443322\ldots$$

となっている．ケイレスのニム列は

$$0.1231432\ldots$$

となっていたことを思い出そう（p.92 の翻訳ノート，表 4.3）．この節の例題のゲーム $\cdot$**777077** の 2 重複ゲームは $\cdot$**07777000077** となっていることを注意しておこう．

訳書 p.123（原著 p.109) 言葉遊び

希少な値 (rare number) = 邪悪数 (evil) 偶数 (even) と語呂合わせをしている．

普通の値 (common number) = 嫌悪数 (odious) 奇数 (odd) と語呂合わせをしている．

訳書 p.123（原著 p.110) 除外された数

mex の定義の中には，excluded numbers （除外された数）というものは明示されていないが，mex(0, 1, 3, 4) などと書くとき，mex をとるリストに含まれている数（この例では，0,1,3,4）が excluded numbers である．minimal-excluded number とは，0, 1, 2, 3, ⋯ の中から，リストの載っている数 (excluded numbers) を除外した上で残った数（この例では，2,5,6,...）の最小値を与えるのが関数 mex である．excluded numbers の最小値ではない．

1.5 第 5 章

訳書 pp.136-138（原著 pp.122-124) 小切手の現金化

お金の流れがきちんと書かれてないので理解が難しいところがある．たとえば，図 5.4 の $\{0|-1\} = -1/2 + \{1/2|-1/2\}$ 局面で $\{1/2|-1/2\}$ の成分で手を打つということは，左手であれば，額面 1/2 の小切手を現金化してテーブルから 1/2 を手に入れるが，同時に 自分の持ち金を 1/2 減らす．しめて増減なしの 0 の変化である．右手であれば，額面 1/2 の小

切手を現金化してテーブルから 1/2 を手に入れると同時に 1/2 を増やして持ち金を 1 増やす．このようなやり取りができるようにするために，ゲームのはじめになにがしかのお金を各プレーヤーは所持して，テーブルにもお金をおいてスタートするということになる．勝負は結果として手元に残る金額から開始時の所持金の額は引いて，すなわち，儲けた金額から計算する必要がある．

訳書 p.139（原著 p.124) 問いと答え

図 5.1（ドミニーリング）の局面で，愚かにも左手が右上隅の角から始めたとすると，値 ± 1 の領域が２つできてしまい，これらはペアとして値 0 となり，右手に渡された局面は全体で $0-1+0+3/4=-1/4$ の値をもつこととなり，右手が勝者となる．

訳書 p.140（原著 p.125) 同じ熱さ

「しかし，もし 2 つのゲームが同じ熱さならば，いくらか注意が必要である．」の意図は，

$$\{x|y*\}+*=\{x*|y\},\ (x>y)\text{ のとき}$$

において，$x=y$ のときを除いていることに注目させることである．ゲーム $\{x|x*\}+*$ においては，プレーヤーたちは手を打つとき，$\{x|x*\}$ に手をつけるのではなく，$*=\{0|0\}$ に手をつけ，ゲームの値は $\{\{x|x*\}|\{x|x*\}\}$ となる．なぜかというと，

$$\begin{aligned}\{x|x*\}+* &= \{x*,\{x|x*\}|x**,\{x|x*\}\}\\ &= \{x*,\{x|x*\}|x,\{x|x*\}\}\\ &= \{\{x|x*\}|\{x|x*\}\}\end{aligned}$$

となるから．最後の等式は，左手にとって $x^L*<x$ であり，右手にとって $x^R>x*$ ということによる．

1.6 第 6 章

訳書 p.165（原著 p.149) $G+G=1$

$G=\{2|-1\}$ に対して，なぜ $G+G=1$ かというと，$G=1/2+\{3/2|-3/2\}$ であるから，

$$G+G=1+\{3/2|-3/2\}+\{3/2|-3/2\}=1+0=1$$

というわけである．

また，H が左ストップ 1，右ストップ -1 をもつというのは，左が $\{2|1\}=3/2+\{1/2|-1/2\}$ の選択肢に向かったとき，右手は必ず $\{1/2|-1/2\}$ で手を打つことになり，右手の手番で $3/2-1/2=1$ で終局する，右手が $-1*=-1+\{0|0\}$ の選択肢に向かったとき，左手は必ず $\{0|0\}$ で手を打つので，左手の手番で $-1+0=-1$ で終局する．

さらに，$4H=1$ である理由は，対称化により，

$$\begin{aligned}2|1||-1* &= \{\{2|1\}|-1+\{0|0\}\}\\ &= \{3/2+\{1/2|-1/2\}|-1+\{0|0\}\}\\ &= 1/4+\{x|-x\}\end{aligned}$$

となるからである．ここで，$x = 5/4 + 1/2\{\{1/2| - 1/2\} - \{0|0\}\}$ とおいた．

訳書 p.166（原著 p.150) 図 6.4, 原著誤り

図 6.4 の雲の左は 0 のほんの少し左をよぎって 0 を完全に覆っていること，雲の右は 2 のほんの少し左をよぎって 2 は覆っていないことに注意．原著ではこの図に誤りがある（$L(G) = R(2)$ を $L(G) = L(2)$ に訂正した）．

訳書 p.167（原著 p.151) 冷却公式

冷却公式に関する記述が原著では

> $G_t = \{G_t^L - t \mid G_t^R + t\}$ *unless*
> there is a smaller temperature
> t' for which $G_{t'}$ is infinitesimally
> close to a number x, in which case
> $G_t = x \quad$ for all $\quad t > t'$.

THE COOLING FORMULA

となっているが，これが G_t の再帰的な定義になっていることを読者が理解するのは大変に困難になると思われる，そこで，訳書では

> もし，$G_{t'}$ がある数 x に限りなく近い，
> t よりも小さな温度 t' が存在しなければ，
> $G_t = \{G^L{}_t - t \mid G^R{}_t + t\}$ とする．
> もし，存在する場合には，
> すべての $t > t'$ に対して，$G_t = x$ とする．

冷却公式

というように，原著の記述 $G_t = \{G_t^L - t \mid G_t^R + t\}$ を $G_t = \{G^L{}_t - t \mid G^R{}_t + t\}$ と変更している．もともと，Conway の著書 ONAG, p.103 では，この修正のように記述されている．この修正をしても，この公式を正確に理解するにはかなり数学的な知識がないと無理かもしれない．たとえば，x を数とするとき，$x_t = x$ であることにも注意すれば，$G_1 = \{2_1 - 1| - 1_1 + 1\} = \{2 - 1| - 1 + 1\} = \{1|0\}$ となるわけである．

訳書 pp.171,179（原著 pp.154,161) 多重バー

多重バーはカッコを用いない時に用いる簡略記法であると宣言しておきながら，著者はカッコがあっても，p.171 のスノート局面のように，多重バーを用いている場合がある．これは意図的にバーの位付けを明示するためと思われる．

訳書 p.174（原著 p.157) 原著誤り図 6.13 の左の順当な場合，原著では不等式が $\geq$ となっているが，$>$ の誤りと思われるので修正した．

訳書 p.174（原著 p.157) 原著誤り
原著では $G \ngeq 1$ となっているが，$G \nleq 1$ の間違いと思われるので修正した．

訳書 p.178（原著 p.161) 大場より急場
原著では，Excitable moves keep **sente**. Equiable ones don't.（興奮する手は先手を維持する．順当な手はそうでない）とある．日本語の「先手」という言葉を著者らは誤解しているようだ．この英語に対応する日本の囲碁の格言は存在しない．文脈から「大場より急場」というのがふさわしい格言と思われる．

訳書 p.199（原著 p.180）原著誤り：スノートチェインの値
Guy 教授から送られて来た Errata の情報を反映させて，図 6.28 には原著の誤り（右列の上から 2, 3 段目のスノートチェイン）を訂正した箇所がある．

訳書 p.200（原著 p.181）原著誤り：スノートチェインの値
Guy 教授から送られて来た Errata の情報を反映させて，表 6.1 の原著の誤りを訂正した箇所が多々ある．原著の Table 1 を次ページに，訳書の訂正版を次々ページに掲載しておく．原著の表ではスノートチェインの値は手書きで書かれていたが，訂正したところは印刷フォントとなっているのでよく見ればどう訂正がなされているのかが分かるはずである（図 6.28, 図 6.29 も同様）．Guy 教授の Errata List には誤った訂正指示までが混入していて，それに気づくのに多少時間を取られた．

訳書 p.201（原著 p.182）原著誤り：スノートチェインの値
Guy 教授から送られて来た Errata の情報を反映させて，図 6.29 にも原著の誤り（左列の上から 10 段目のスノートチェイン）を訂正した箇所がある．

<table>
<tr><th></th><th></th><th></th><th></th><th></th><th></th><th></th><th></th><th></th></tr>
<tr><td>2</td><td>4|2||1*|*</td><td>4|3||1*|*</td><td>4|2||±1</td><td>3|2||1|0</td><td>3|2||±1,1*|*</td><td>1</td><td>4|2||0,1|-2</td><td></td></tr>
<tr><td>4|2||1* *</td><td>4|2||±1*</td><td>4|3||±1*</td><td>1±(3|0,3|*)</td><td>3|2||0,±1</td><td>3|2||-1,1|-2</td><td>3|1||*|-2</td><td>4|1,4|1*|||1|0||-1|-2,1|-3,1*|-3</td><td></td></tr>
<tr><td>4|3||1*|*</td><td>4|3||±1*</td><td>1*</td><td>4|1,4|1*||±1*,1|-1*</td><td>3|2||0</td><td>3|2||-1</td><td>3|1||*|-1*</td><td>4|1*,2||*|-2*</td><td></td></tr>
<tr><td>4|2||±1</td><td>1±(3|0,3|*)</td><td>4|1,4|1*||±1*,1|-1*</td><td>1</td><td>3|2||0|-1</td><td>3|1*||0|-2</td><td>3|1||0|-2</td><td>4|1||*|-3</td><td></td></tr>
<tr><td>3|2||1|0</td><td>3|2||0,±1</td><td>3|2||0</td><td>3|2||0|-1</td><td>1</td><td>2|1||0</td><td>2|1||0|-1</td><td>3|2||*|-1*,0|-2</td><td></td></tr>
<tr><td>3|2||±1,1*|*</td><td>3|2||1|-2,-1</td><td>3|2||-1</td><td>3|1*||0|-2</td><td>2|1||0</td><td>2|1||-1</td><td>±(2|0,2|*)</td><td>3|1*||-1*|-2*,0|-3</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>3|1||*|-2</td><td>3|1||*|-1*</td><td>3|1||0|-2</td><td>2|1||0|-1</td><td>±(2|0,2|*)</td><td>0</td><td>3|1||-1*|-3</td><td></td></tr>
<tr><td>4|2||0,1|-2</td><td>4|1,4|1*|||1|0||-1|-2,1|-3,1*|-3</td><td>4|1*,2||*|-2*</td><td>4|1||*|-3</td><td>3|2||*|-1*,0|-2</td><td>3|1*||-1*|-2*,0|-3</td><td>3|1||-1*|-3</td><td>*</td><td></td></tr>
<tr><td>3|2||±1,1*|*</td><td>3|2||0|-2</td><td>1*</td><td>3|1*||0|-2</td><td>2|1||0</td><td>2|1||-1,0|-2</td><td>±(2|0,2|*)</td><td>3|1*||-1|-3</td><td></td></tr>
<tr><td>3*||0|-1</td><td>3*||0|-2,*|-2</td><td>3|0,3|*,2*|1*||*|-1*,0|-2</td><td>2*|1*||0|-2</td><td>2|1||-1*</td><td>±2*</td><td>2|0,1||-1|-2</td><td>3|0,2*|1*||-1*|-3</td><td></td></tr>
<tr><td>2*||0|-1</td><td>2*||-1|-2</td><td>±(2|0,2|*)</td><td>2|0,1*|*||-1|-2</td><td>±1*</td><td>1*||-1|-2</td><td>0||-1|-2</td><td>2|0,1*|*||-2|-3</td><td></td></tr>
<tr><td>3|1||0</td><td>3|1|||0|-3,1|0||-1|-2</td><td>3|1*||*|-2*</td><td>±(3|0,3|*)</td><td>2|1||*|-1*,0|-2</td><td>2|0||-1*|-2*</td><td>2|0||-1*|-3</td><td>3|*||-1|-4</td><td></td></tr>
<tr><td>3|1||0,0|-3</td><td>3|1||*|-3,-1*|-2*</td><td>±(2|1)*</td><td>2*|*||-1*|-3</td><td>±(2|0,2|*)</td><td>2|0,1*|*||0|-3,*|-3,-1*|-2*</td><td>-1*</td><td>2*|*||-1*|-4,-2</td><td></td></tr>
<tr><td>3|1||-1|-2</td><td>±(3|1)</td><td>3|*,2*|1*||-1|-3</td><td>3|0,2|1||0|-1|||-1|-3</td><td>2|1||-2*</td><td>2|0,2|*||-3*</td><td>2|0||-2|-3</td><td>3|1,3|1*,2|1||0|-1|||-1|-4,-1*|-4</td><td></td></tr>
<tr><td>±(2|1)</td><td>2|1||-1|-3</td><td>3|0,0||-1|-3</td><td>0||-1|-3</td><td>1|0||-2*</td><td>1|0||-3*</td><td>*|-1*,±1||-2|-3</td><td>0,2|-1||-2|-4</td><td></td></tr>
</table>

Table 1. Values of Snort Chains with Six Nodes.

表 6.1: 6節点のスノートチェインの値.

<table>
<tr><th></th><th></th><th></th><th></th><th></th><th></th><th></th><th></th><th></th></tr>
<tr><td>2</td><td>4|2||1*|*</td><td>4|3||1*|*</td><td>4|2||±1</td><td>3|2||1|0</td><td>3|2||±1,1*|*</td><td>1</td><td>4|2||0,1|-2</td><td></td></tr>
<tr><td>4|2||1*|*</td><td>4|2||±1*</td><td>4|3||±1*</td><td>1±(3|0,3|*)</td><td>3|2||0,±1</td><td>3|2||-1,1|-2</td><td>3|1||*|-2</td><td>4|1,4|1*|||1|0||-1|-2,1|-3,1*|-3</td><td></td></tr>
<tr><td>4|3||1*|*</td><td>4|3||±1*</td><td>2|±1*</td><td>2,4|1,4|1*||±1*,1|-1*</td><td>3|2||0</td><td>3|2||-1</td><td>3|1||*|-1*</td><td>4|1*,2||*|-2*</td><td></td></tr>
<tr><td>4|2||±1</td><td>1±(3|0,3|*)</td><td>2,4|1,4|1*||±1*,1|-1*</td><td>1</td><td>3|2||0|-1</td><td>3|1*||0|-2</td><td>3|1||0|-2</td><td>4|1||*|-3</td><td></td></tr>
<tr><td>3|2||1|0</td><td>3|2||0,±1</td><td>3|2||0</td><td>3|2||0|-1</td><td>1</td><td>2|1||0</td><td>2|1||0|-1</td><td>3|2||*|-1*,0|-2</td><td></td></tr>
<tr><td>3|2||±1,1*|*</td><td>3|2||1|-2,-1</td><td>3|2||-1</td><td>3|1*||0|-2</td><td>2|1||0</td><td>2|1||-1</td><td>±(2|0,2|*)</td><td>3|1*||-1*|-2*,0|-3</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>3|1||*|-2</td><td>2*|1*,3|1||*|-1*</td><td>3|1||0|-2</td><td>2|1||0|-1</td><td>±(2|0,2|*)</td><td>0</td><td>3|1||-1*|-3</td><td></td></tr>
<tr><td>4|2||0,1|-2</td><td>4|1,4|1*|||1|0||-1|-2,1|-3,1*|-3</td><td>4|1*,2||*|-2*</td><td>4|1||*|-3</td><td>3|2||*|-1*,0|-2</td><td>3|1*||-1*|-2*,0|-3</td><td>3|1||-1*|-3</td><td>*</td><td></td></tr>
<tr><td>3|2||±1,1*|*</td><td>3|2||0|-2</td><td>1*</td><td>3|1*||0|-2</td><td>2|1||0</td><td>2|1||-1,0|-2</td><td>±(2|0,2|*)</td><td>3|1*||-1|-3</td><td></td></tr>
<tr><td>3*||0|-1</td><td>3*||0|-2,*|-2</td><td>3|0,3|*,2*|1*||*|-1*,0|-2</td><td>2*|1*||0|-2</td><td>2*|-1*</td><td>±2*</td><td>2|0,1||-1|-2</td><td>3|0,2*|1*||-1*|-3</td><td></td></tr>
<tr><td>2*||0|-1</td><td>2*||-1|-2</td><td>±(2|0,2|*)</td><td>2|0,1*|*||-1|-2</td><td>±1*</td><td>1*|-2*</td><td>0||-1|-2</td><td>2|0,1*|*||-2|-3</td><td></td></tr>
<tr><td>3|1||0</td><td>3|1|||0|-3,1|0||-1|-2</td><td>3|1*||*|-2*</td><td>±(3|0,3|*)</td><td>2|1||*|-1*,0|-2</td><td>2|0||-1*|-2*</td><td>2|0||-1*|-3</td><td>3|*||-1|-4</td><td></td></tr>
<tr><td>3|1||*|-2</td><td>3|1||*|-3,-1*|-2*</td><td>±(2|1)*</td><td>2*|*||-1*|-3</td><td>±(2|0,2|*)</td><td>2|0,1*|*||0|-3,*|-3,-1*|-2*</td><td>-1*</td><td>2*|*||-1*|-4,-2</td><td></td></tr>
<tr><td>3|1||-1|-2</td><td>±(3|1)</td><td>3|*,2*|1*||-1|-3</td><td>3|0,2|1||0|-1|||-1|-3</td><td>2|1||-2*</td><td>2|0,2|*||-3*</td><td>2|0||-2|-3</td><td>3|-1,3|-1*,2|1|0|-1|||-1|-4,-1*|-4</td><td></td></tr>
<tr><td>±(2|1)</td><td>2|1||-1|-3</td><td>2|*||-1|-3</td><td>0||-1|-3</td><td>1|0||-2*</td><td>1|0||-3*</td><td>*|-1*,±1||-2|-3</td><td>0,2|-1||-2|-4</td><td></td></tr>
</table>

1.7　第 7 章

訳書 pp.226,228（原著 pp.205,207) 言葉遊び
　図 7.17, 図 7.19．原著はキリン (giraffe) を G-raph と書いて，グラフと掛けた駄洒落になっている．

訳書 p.238（原著 p.217) 言葉遊び
　図 7.31．原著では hard という言葉を，解くのが困難という意味と，ベッドが固いという意味に掛けた駄洒落をここでも使っている．A Moderately Hard Bed という caption を「適度に難しいベッド」とするのでは著者のふざけが伝わらないので,「適度に固いベッド」と訳すことにした．

1.8　第 8 章

訳書 p.263（原著 p.241) 言葉遊び

青 (Blue) 花がちょうど赤 (rED) 花と同じ数で
均衡が保たれている (BlancED) 花園を
フラワーベッド (flowerBED) と呼ぼう．

のところでは，大文字の BED がどの行にも組み込まれるように言葉遊びをしている．

2　翻訳ノート vol.2

2.1　第 9 章

2.2　第 10 章

訳書 p.319（原著 p.304)
　「ここで，ドット対は最適左手選択肢の（どうでもいい, irrelevant）左計算書と，最適右手選択肢の（どうでもいい）右計算書を表している.」とは，$\{..7_2|0_4..\}$ を正確に書いた $\{8_1 7_2|0_4-5_3\}$ の 8_1, -5_3 のことである．そしてつぎの節に記述されているように，熱い局面に対する計算書規則により 9×3 の計算書は $7_3 0_5$ となるわけである．

訳書 p.322（原著 p.307) 言葉遊び
　GOOD と odd，EVIL と even でまた言葉遊びをしている．

訳書 p.327（原著 p.312) 第 14 節
　共通ゲームであれば，手番のプレーヤーが手を打てなければ，相手も打てないので，どちらのプレーヤーも手を打てないことになり，2 つの規則を区別することは意味がない．このとき，通常のように，打てなくなったプレーヤーが負けが標準ルール，打てなくなったプレーヤーが勝ちがミゼールルール．個別ゲームのときに，2 つの規則を区別する意味がある．どちらのプレーヤーも手を打てないときに終局とする場合，勝者をだれにするのかについて補

則が必要になるわけだ．

訳書 p.328（原著 p.312) 言葉遊び
or($\vee$) に対して ur($\bigtriangledown$) と洒落ているわけである．

訳書 p.328（原著 p.312) 言葉遊び
ファラダの切断された頭 (severed head) と切断された選択的複合 (severed selective compound) とを引っかけた言葉遊びにもなっている．

2.3 第 11 章

訳書 p.343（原著 p.327) 章の表題
この章に「決着のないゲーム Games Indefinite」という表題が付いているが，本文中にそれが全然出てこない．どう扱ったらいいか不明．

訳書 p.346（原著 p.329) 有終ゲーム
「この強い終局条件」とは，プレーヤーが交互にプレーするという条件をはずしても手の無限列が生じないということである．強い終局条件をみたすゲームを有終ゲーム（ender）といい，ある時点から左手と右手が交互に打てば必ず停止するゲームを停止ゲーム（stopper）という (p.354 のノート参照).

訳書 p.347（原著 p.330) 無限のニム
$2^\omega = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots = <0,1> \cdot <0,1> \cdot <0,1> \cdot <0,1> \cdots = \omega$ であり，序数の意味で $2^\omega = \omega$ となっている．$<0,1>$ はペアを 1 つのものとみることに対応している．

訳書 p.349（原著 p.333) Hilbert
「Hilbert ニム」とは無限次元ニムのことであるらしい．

訳書 p.353（原著 p.335) ループ型ゲーム
図 11.7 のゲームで左手が先手のときは，彼が打てる手は $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ のどの駒でも構わないが，必勝手は γ の駒を α に動かすことである．すると，右手は α にある 2 つの駒しか動かせず，そのうちの 1 つを δ に動かさざるをえない．この次に左手は α に残った 1 つを右の倉庫にしまう．その結果，駒は β, δ にそれぞれ 1 つと 2 つ残される局面となる．この局面からは右手は手を打てない．すなわち，左手の勝利である．

右手が先手のとき，打ってはいけない手は，γ の駒を β に動かすことである．これをすると，左手は α の駒を右の倉庫にしまって，β, δ に駒がそれぞれ 2 つと 1 つ残される局面となり，右手には打つ手が残されない．したがって，右手は初手で α の駒を δ に動かし，駒が β, γ, δ だけに存在する局面を作る．ここから，左手が駒を倉庫にしまおうと α に運んでも，右手はそれを δ に運んでしまって左手の野望をくじくことができる．すなわち，無限プレーとする

ことができ，ドローとなる．

訳書 p.354（原著 p.336) あとでなるほど

double-vision double-take を，“2 つの見方あとでなるほど” と訳してみた．double vision は複視．double take は a delayed reaction indicateng surprise あとで気がついてはっと驚くこと．当初，”複視遅延驚き” と訳してみたりした．

訳書 p.354（原著 p.337) 停止ゲーム

停止ゲーム（stopper）では

$$g \to g^X \to g^{XY} \to \ldots \to g^{XY\ldots L} \to g^{XY\ldots LR} \to g^{XY\ldots LRL} \to \ldots$$

はあらわれないが，左手と右手が交互でなく 2 手づつ打つ無限列などはありうる．

$$g \to g^X \to g^{XY} \to \ldots \to g^{XY\ldots L} \to g^{XY\ldots LLRR} \to g^{XY\ldots LLRRLL} \to \ldots$$

次のような無限列もありうる．

$$g \to \ldots \to g^{XY\ldots LRRLRLLR} \to \ldots$$

「あなたがどのような局面から開始しようと，プレーは最後には停止することになる」のは左手と右手が交互に手を打つという条件のもとでの話である．

左手と右手の勝手な順序で打つ無限列はどんなものでもあらわれないゲームが有終ゲーム（ender）である．というわけで，

$$\{\text{ender}\} \subset \{\text{stopper}\}$$

であり，図 11.7 のゲームは停止ゲームではない．したがって，有終ゲームではもちろんない．

訳書 p.357（原著 p.338) にじり寄り

Sidling を「にじり寄り」と訳した．ループ型ゲームに対する近似解法で，繰り返して近似を改良していこうとする手法である．

訳書 p.357（原著 p.339) 図 11.7 の解

図 11.7 の解法をここで与えている．実際の戦法は p.353 への翻訳ノートとして先に記した．

訳書 p.362（原著 p.343) 図 11.9

図 11.9 が値 $-\frac{1}{64}\,\&-\frac{5}{8}$ をもつというのは，Li のルールからオンサイドは下から赤，青，青，青，青，青，青，青というハッケンブシュ列で，その値が $-\frac{1}{64}$ であり，オフサイドは下から赤，青，赤，青というハッケンブシュ列で，その値が $-\frac{5}{8}$ となっていることによる．

訳書 p.364（原著 p.345) 図 11.10

p.363 に書いてある Li のルールを考慮すると，図 11.10 のハッケンブシュ絵には間違いが含まれていると当初思われた．上段左から 3 番目の絵の薄青ハッケンブシュ列，および，上段左から 6 番目の絵の薄青枝に乗ったピンクハッケンブシュ列は，上下が反転しているのではないかと思われたが，薄青やピンクの枝は刈られることはなく，単に反対の色に変色されるだけなので無限に伸びた列が有限の列に変わることはなく，反転させる必要はない．

しかし，左から 1 番目の青ハッケンブシュ列，および，5 番目の赤ハッケンブシュ列はこの絵のように逆さまになっていないといけない．また原著では，赤，ピンクや青，薄青がはっきりでていない．上段左から，青，青，薄青，薄青，青と赤，薄青とピンク，青と赤，薄青とピンク，薄青とピンクで，下段左から，青と赤，青と赤，薄青とピンク，薄青とピンク，薄青とピンクとなっている．

訳書 p.380（原著 p.359) 図 11.20, 原著誤り

原著の Figure 20 とその上のリストアップされている等式は以下の通り．

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{A} = \mathbf{ace} = 0|\mathbf{tiny} & \mathbf{A}- = \mathbf{on}|\mathbf{A}||0 & \mathbf{A}+ = \mathbf{A} \\
\mathbf{J} = \mathbf{joker} = 0|\bar{\mathbf{A}}+ & \mathbf{J}- = \mathbf{on}|\bar{\mathbf{J}}||\bar{\mathbf{A}} & \mathbf{J}+ = \mathbf{J} \\
\bar{\mathbf{J}} = -\mathbf{joker} = \mathbf{A}-|0 & \bar{\mathbf{J}}+ = \mathbf{A}||\mathbf{J}|\mathbf{off} & \bar{\mathbf{J}}- = \bar{\mathbf{J}} \\
\bar{\mathbf{A}} = -\mathbf{ace} = \mathbf{miny}|0 & \bar{\mathbf{A}}+ = 0||\bar{\mathbf{A}}|\mathbf{off} & \bar{\mathbf{A}}- = \bar{\mathbf{A}}
\end{array}$$

n	$n\clubsuit$	$n\diamondsuit$	$n\heartsuit$	$n\spadesuit$	
...	...	...	...	...	
$\bar{3} = -3$	$\bar{2}\clubsuit \mid 0$	$\bar{2}\diamondsuit \mid 0$	$\bar{2}\heartsuit \mid 0$	$\bar{2}\spadesuit \mid 0$	For all games X
$\bar{2} = -2$	$\bar{1}\clubsuit \mid 0$	$\bar{1}\diamondsuit \mid 0$	$\bar{1}\heartsuit \mid 0$	$\mathbf{A} \mid 0$	in this table
$\bar{1} = -1$	$\clubsuit \mid 0$	$\mathbf{J} \mid 0$	$\heartsuit \mid 0$	$0 \mid 2\spadesuit$	$X+ = X- = X$
0	$1\clubsuit \mid 0$	$\mathbf{A} \mid \bar{1}\diamondsuit$	$1\heartsuit \mid \bar{\mathbf{A}}$	$0 \mid \bar{1}\clubsuit$	**deuce, trey,** ... are
1	$2\clubsuit \mid 0$	$0 \mid 1\diamondsuit$	$0 \mid \mathbf{J}$	$0 \mid \spadesuit$	alternative names for
2	$0 \mid \mathbf{A}$	$0 \mid 1\diamondsuit$	$0 \mid 1\heartsuit$	$0 \mid 1\spadesuit$	$2\clubsuit, 3\clubsuit, \ldots$
3	$0 \mid 2\clubsuit$	$0 \mid 2\diamondsuit$	$0 \mid 2\heartsuit$	$0 \mid 2\spadesuit$	(but **ace** $\neq \clubsuit$).
...	...	...	...	...	
	$\clubsuit = 0\clubsuit$	$\diamondsuit = 0\diamondsuit$	$\heartsuit = 0\heartsuit$	$\spadesuit = 0\spadesuit$	

図 20: Laying Out the Cards.

であるが，これらには多くの誤りが含まれている（原著初版に含まれている誤りを踏襲するばかりでなく，さらに誤りが増加している）．正しくは次の通りである．

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{A} = \mathbf{ace} = 0|\mathbf{tiny} & \mathbf{A}- = \mathbf{on}|\mathbf{A}||0 & \mathbf{A}+ = 0||\mathbf{A}|\mathbf{off} \\
\mathbf{J} = \mathbf{joker} = 0|\bar{\mathbf{A}}+ & \mathbf{J}- = \mathbf{on}|\mathbf{J}||0 & \mathbf{J}+ = 0||\mathbf{J}|\mathbf{off} \\
\bar{\mathbf{J}} = -\mathbf{joker} = \mathbf{A}-|0 & \bar{\mathbf{J}}+ = 0||\bar{\mathbf{J}}|\mathbf{off} & \bar{\mathbf{J}}- = \mathbf{on}|\bar{\mathbf{J}}||0 \\
\bar{\mathbf{A}} = -\mathbf{ace} = \mathbf{miny}|0 & \bar{\mathbf{A}}+ = 0||\bar{\mathbf{A}}|\mathbf{off} & \bar{\mathbf{A}}- = \mathbf{on}|\bar{\mathbf{A}}||0
\end{array}$$

n	$n\clubsuit$	$n\diamondsuit$	$n\heartsuit$	$n\spadesuit$	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
$\bar{3}=-3$	$\bar{2}\clubsuit\|0$	$\bar{2}\diamondsuit\|0$	$\bar{2}\heartsuit\|0$	$\bar{2}\spadesuit\|0$	この表のすべての
$\bar{2}=-2$	$\bar{1}\clubsuit\|0$	$\bar{1}\diamondsuit\|0$	$\bar{1}\heartsuit\|0$	$\bar{\mathbf{A}}\|0$	ゲーム X に対して
$\bar{1}=-1$	$\clubsuit\|0$	$\bar{\mathbf{J}}\|0$	$\heartsuit\|0$	$0\|\bar{2}\spadesuit$	$X+=X-=X$
0	$1\clubsuit\|0$	$0\|\bar{1}\diamondsuit$	$1\heartsuit\|0$	$0\|\bar{1}\spadesuit$	**deuce, trey,** $\dots$ は
1	$2\clubsuit\|0$	$0\|\diamondsuit$	$0\|\mathbf{J}$	$0\|\spadesuit$	$2\clubsuit, 3\clubsuit, \dots$ に対する
2	$0\|\mathbf{A}$	$0\|1\diamondsuit$	$0\|1\heartsuit$	$0\|1\spadesuit$	別名である
3	$0\|2\clubsuit$	$0\|2\diamondsuit$	$0\|2\heartsuit$	$0\|2\spadesuit$	（ただし，**ace** $\neq 1\clubsuit$ ）．
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
	$\clubsuit=0\clubsuit$	$\diamondsuit=0\diamondsuit$	$\heartsuit=0\heartsuit$	$\spadesuit=0\spadesuit$	

図 11.20: カードのレイアウト.

ちなみに，原子量 0 のスーツは次のように定義される：

$$\begin{aligned}
\clubsuit &= 0\clubsuit = 1\clubsuit|0 = 2\clubsuit|0||0 = 0|\mathbf{A}||0|||0,\\
\diamondsuit &= 0\diamondsuit = 0|\bar{1}\diamondsuit = 0||\bar{\mathbf{J}}|0,\\
\heartsuit &= 0\heartsuit = 1\heartsuit|0 = 0|\mathbf{J}||0,\\
\spadesuit &= 0\spadesuit = 0|\bar{1}\spadesuit = 0||0|\bar{2}\spadesuit = 0|||0||\bar{\mathbf{A}}|0.
\end{aligned}$$

訳書 p.382（原著 p.361) 原著誤り

図 11.22 において原著に誤りがある（原著の初版を改訂する時に生じた）.

$$(X+)+(Y+)+(Z+)\&(T+) \quad \text{は} \quad (X+)+(Y+)=(Z+)\&(T+) \quad \text{に，}$$
$$(X-)+(Y-)+(Z-)\&(T-) \quad \text{は} \quad (X-)+(Y-)=(Z-)\&(T-) \quad \text{に，}$$

それぞれ修正して訳書に記載した.

以下に，トランプ・カードの各スーツのプラム木を例示しておく．

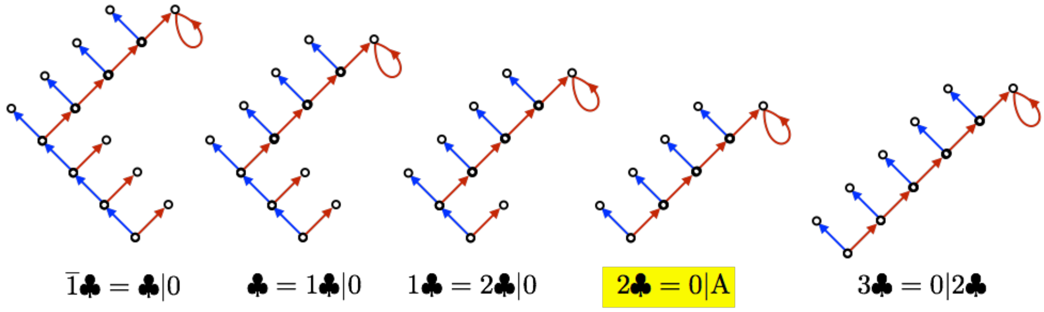

図 11.A: The Plumtrees of Clubs

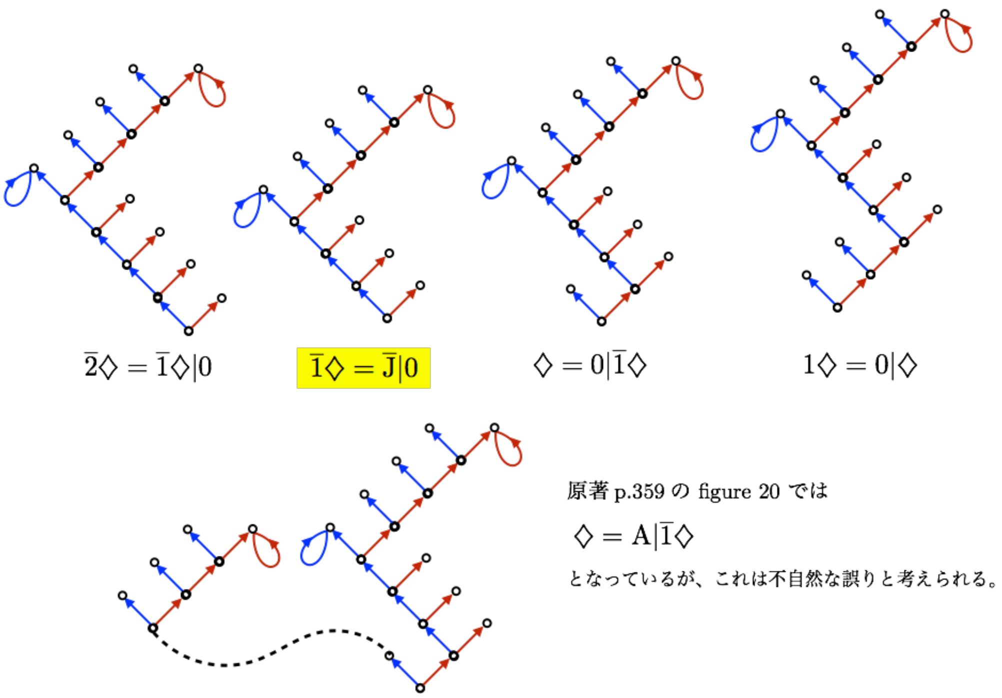

図 11.B: The Plumtrees of Diamonds

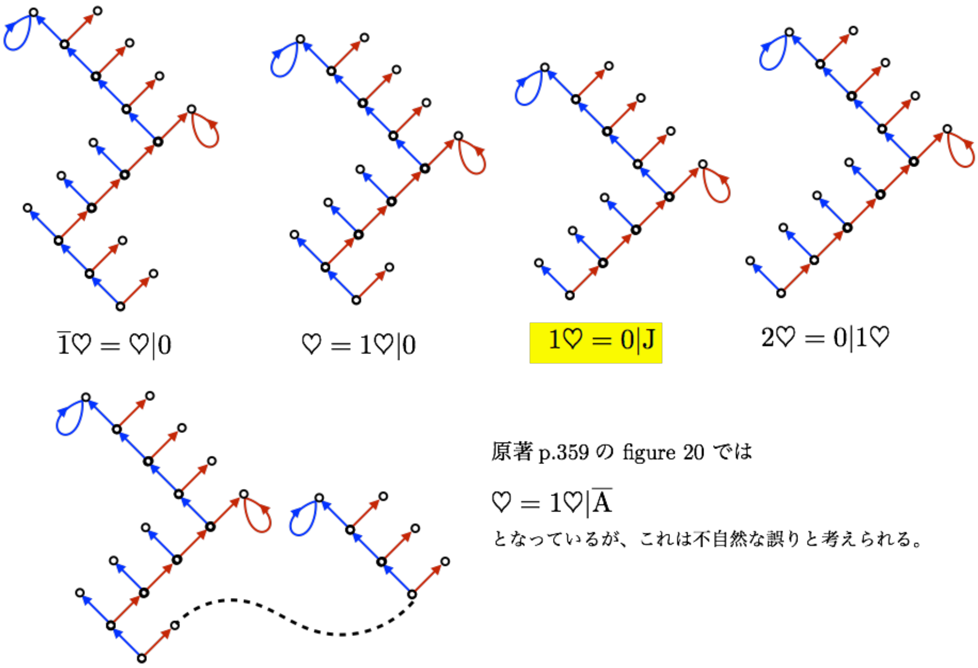

図 11.C: The Plumtrees of Hearts

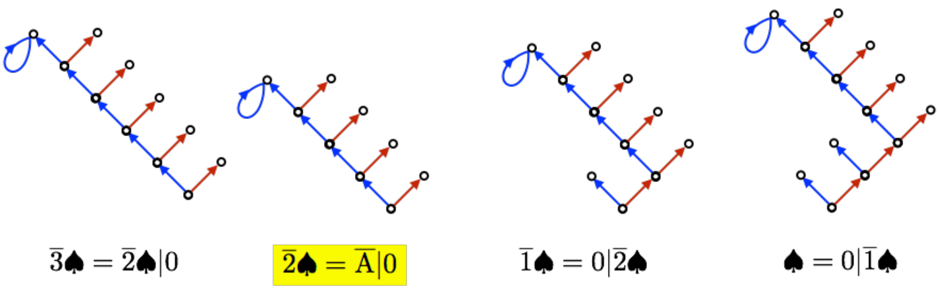

図 11.D: The Plumtrees of Spades

2.12 第 12 章

2.13 第 13 章

訳書 p.440（原著 p.414) ゲーム生息地図

図 13.1 の「失われた世界のゲーム生息地」について本文は何も触れていないが，ミゼール共通ゲームの分類が動物の棲み分け地図にたとえて描かれていて，第 13 章の総まとめとして見ると興味深い．著者らの遊び心の産物で，趣向に満ちていることを知ると楽しめるが，領域の命名法に秩序のないことが残念である．

北部の「飼いならされランド」は飼いならされた（tame）動物の生息地である．この地域にはニムランドと飼いならされサイドがあり，ニムランドのニム連山には属性 0 の Dawson のケイレス D_{15}（p.468），属性 1 の Grundy のゲーム G_{15}（p.469），属性 2 の士官ゲーム O_9（p.469）とガイルス $\mathrm{Y}_{19}, \mathrm{Y}_{26}$（p.465 の属性列より），属性 3 のケイルス K_6（p.461 の表 13.4）などが棲んでいる．また，ミゼールニム $2+2, 3+2$ はそれぞれ属性が $0^0, 1^1$（堅気な単位，p.451）で飼いならされていてニムランドに棲む．ゼリービーンズ J_{15} は属性が 3^3，ケイルス K_7 は属性が 2^2，等々であり，飼いならされサイドに棲む．

川を隔てて南側の未開地方は野生（wild）動物の生息地で,「反抗的（restive）地区」「不安な（restless）地域」「より野生的（wilder）地域」に分かれる.「いままさに野生に別れを告げん（only just gone wild)」とする動物は不安な地域全域と反抗的地区の一部に棲む．また,「半分飼いならされた（half-tame)」動物は反抗的地区，および，より野生的地域の一部に棲むが不安な地域には棲まない，いままさに野生に別れを告げんとする反抗的な動物は半分飼いならされている，などという関係が地図の境界線で表現されている．

原著にはいくつか誤りがある．半分飼いならされたゲーム $\mathrm{H}_4, \mathrm{H}_5$ (定規分割) の属性はそれぞれ $2^{20}, 1^3$ (p.467) であるから，原著における両者の位置を入れ替えた．また，反抗的な Y_{18} (ガイルス), V_{32} (変形定規分割) は原著ではいままさに野生に別れを告げんとする動物に分類されるが，いずれも野生の選択肢 z_1 をもつ（p.465）ので訳書では地図を修正した．

より野生的地域に棲むブージャム（boojum）は，Lewis Carol のナンセンス詩『スナーク狩り』に出てくる架空の動物で非常に危険らしい．

参考のため，原著の図 13.1 を以下に載せておく：

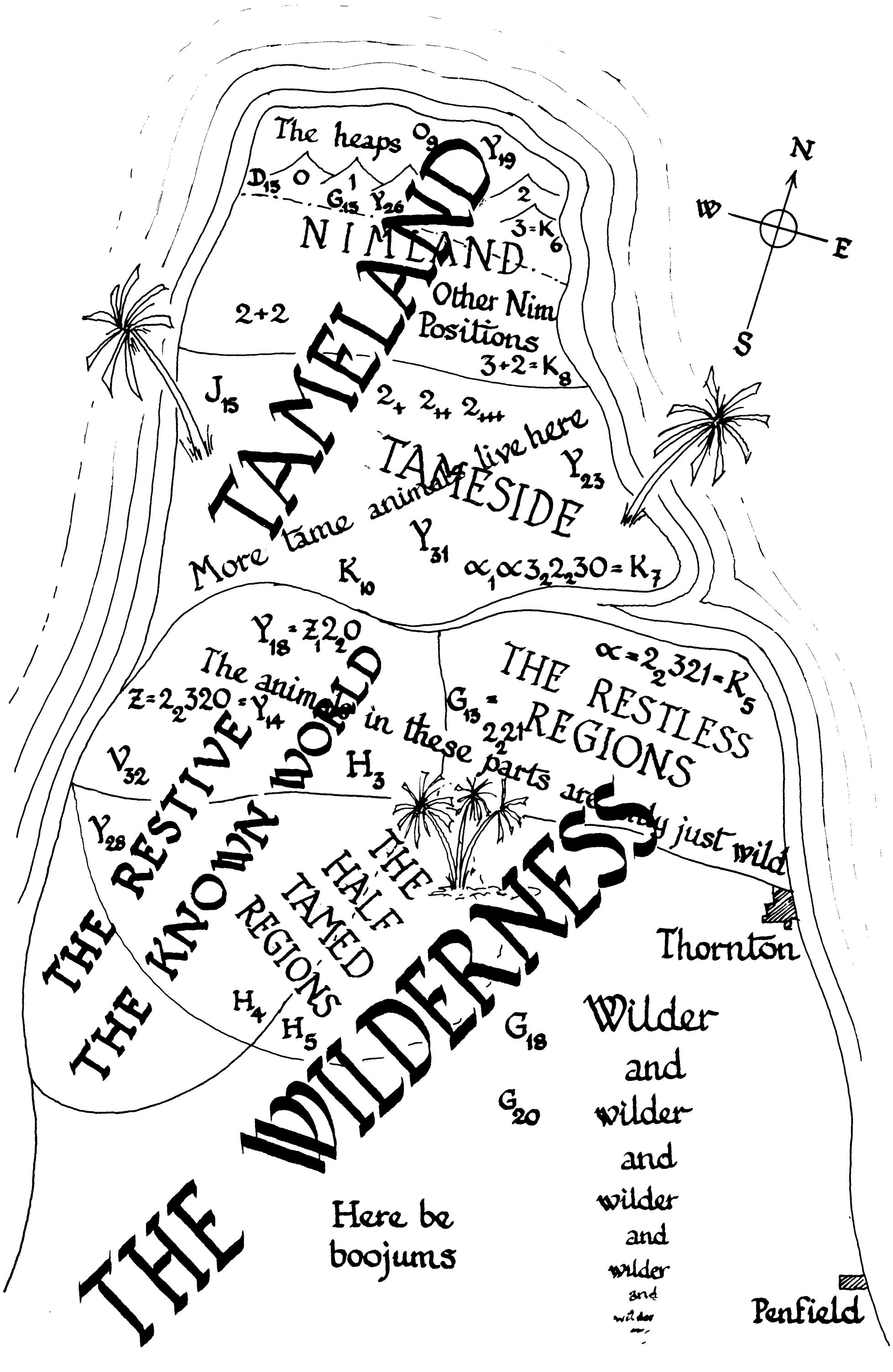

Figure 1. Game Reserves in the Lost World.

訳書 p.442（原著 p.416) ただし書き

手なしゲーム（Endgame）とは，打つ手のない局面 $\{\,|\,\} = 0$ であり，標準プレーではゼロ局面と呼んでいたもので，先手必敗の局面であるが，ミゼールプレーでは先手必勝の局面である．

図 13.3 のように，ミゼールプレーで $H, X, Y, Z, \ldots$ がすべて手なしゲーム，すなわち，先手必勝のとき，あなたが先手なら，$G + X + Y + Z + \ldots$ であなたは G でしか手を打てなくて，局面 D または E を作り，手番を相手に渡す．相手はむざむざあなたを勝たすために H に向かう手を打つわけがない．敵はそれ以外の選択肢を選ぶはずで，その勝敗はこの段階ではわからない．そういう選択肢を選んだとしても G と H の勝敗が一緒でなければ，G と H を等価とは見なせないので，このただし書き「ただし，H が選択肢をもたないときは，G と H は同じ勝敗 0 をもつという条件の下で」が必要となる．

訳書 p.443（原著 p.416) ニム

1 つ山の $\mathcal{P}$ 局面（後手必勝局面）について，ニムゲームの場合は極めて簡単である．すなわち，ミゼールプレーではゲームの値が 1 のときだけ，標準プレーではゲームの値が 0 のときだけである．

訳書 p.444（原著 p.418) ただし書き

「ミゼール Mex ルール」において，なぜ「少なくとも 1 つは 0 か 1」をただし書きにつけているのかが読者に分かりにくい．たとえば，$G = \{0, 2, 5\}$ の場合，$H = \{0\}$ とは可逆手 2,5 の除去により値 1 となる（これはミゼールでは後手必勝の $\mathcal{P}$ 局面である．それに対して，$G = \{1, 3, 4\}$ では，G からは先手は不利な手 3, 4 へは向かわず，勝利手 1 を選ぶ．相手に残った 1 個の豆を無理矢理取らせることで勝てる．すなわち．不利な手の除去により $G = \{1\} = 0$．これは，$H = \{\} = 0$ とするとき，ただし書きに従った G からの可逆手の除去ともみることができる．

訳書 p.445（原著 p.419) $2 + 2$

ミゼールプレーでは，0 は先手必勝，$\mathcal{N}$ 局面であり，$0 + 0$ も同じに $\mathcal{N}$ 局面である．2 は先手必勝，$\mathcal{N}$ 局面であるが，$2 + 2$ は後手必勝，$\mathcal{P}$ 局面である．

1 は後手必勝，$\mathcal{P}$ 局面であり，$1 + 1$ は先手必勝，$\mathcal{N}$ 局面である．$2 + 2$ は後手必勝，$\mathcal{P}$ 局面であり，$(2 + 2) + (2 + 2)$ もまた後手必勝，すなわち，$\mathcal{P}$ 局面となっていることが確認できる（try!）．$G + G$ は $\mathcal{N}$ にも $\mathcal{P}$ にもなりうる．(標準プレーでは常に $G + G$ は $\mathcal{P}$ である．)

訳書 p.445（原著 p.419) $a_n = a + n$

$a_n = a + n$ と書くとき，a は一般的な局面だが n は n 山，すなわち，サイズ n のニム山を意味している．

訳書 p.448（原著 p.421) 可逆手の除去

$\mathrm{G}_{14} = \{0, 1, 3, a\}$ と $H = \{0, 1\} = 2$ が同値であることは，$3 = \{0, 1, 2\}$，$a = \{1, 2, 2 + 2\}$

であるから，3 と a はともに $H=2$ を選択肢としてもつ可逆手（p.441）で，G_{14} から除去できることから明らかである．

訳書 p.446（原著 p.419) Grundy 山をニム山で

このあたりの Grundy のゲームの値の計算は行き届いた注意が肝要だ．ゲームの値をニムゲームの評価に置き換えて計算していることをよく理解しておく必要がある．$\mathrm{G}_{13}=2_221=\{2+2,2,1\}$ と表したとき，選択肢 $2+2,2,1$ は Grundy 山（$\mathrm{G}_2+\mathrm{G}_2,\mathrm{G}_2,\mathrm{G}_1$）ではなく，ニム山の $2+2,2,1$ である．もし，これが $\mathrm{G}_2+\mathrm{G}_2,\mathrm{G}_2,\mathrm{G}_1$ だったら，この先，打つ手が存在しない．

訳書 p.448（原著 p.421) 救出する

p.447 の最下段からの文章は，サイズ 13, 16, 19 の Grundy 山はいずれも値は $a=2_221=\{2+2,2,1\}$ であるので，a を含んだ局面を評価する仕方について言及しているのだ.「救出することができる」とは，難しそうな局面の評価が簡単にできる場合がある，という意味である．

$a+a$ について． a 自身は選択肢として 1 をもっているので先手必勝局面（$\mathcal{N}$ 局面）であり，$a+1$ は後手必勝局面（$\mathcal{P}$ 局面）である．このことは表 13.1 からもわかるがきちんとチェックしてみる必要もある．先手は 1 で手を打たない．$a=\{2+2,2,1\}$ で手を打つとき，1 や 2 には向かわない．もしそうすると相手に 1 山だけを残す勝利手を渡してしまうからだ．だから，2+2 に向かって手を打ち局面は 2+2+1 となる．これは先手必勝の局面である．1 山を崩し，2+2 とすると，相手は 1+2 か 2 の局面しかつくれない．そこで 1 山を作って相手に渡せば勝てることになる．すなわち，$a+1$ は後手必勝局面になっている．したがって，$a+a$ は先手必勝局面（$\mathcal{N}$ 局面）であることがわかる．というのは，先手であれば $a+1$ という局面を作ることができるからだ．ミゼールプレーでは 0 は先手必勝局面なので，$a+a$ を 0 と見なしてしまおうというのがここでの趣旨である．p.445 のノートで書いたように $\mathcal{N}+\mathcal{N}=\mathcal{P}$ ということは一般には成立しないので，個別にチェックして調べないといけない．

枠入りのルールが正しいことの証明は書かれていない．これは読者への挑戦状のようにも思う．表 13.1 を頼りにして，たとえば，$a+1\in\mathcal{P}, a+1+3+4\in\mathcal{P}$ などがこの規則で成り立っていることが分かる．しかし，この表から $a+1+3+4\in\mathcal{P}$ が成り立つことは分かるが，4 山があるのでこのルールは適用できない．

訳書 p.449（原著 p.422） 属性

「標準ニム値 $\mathcal{G}^+(G)$ は，標準プレーにおいて $G+n$ が $\mathcal{P}$ 局面となるニム山のサイズ n として一意に定義された」と言うが，第 1 巻に標準ニム値を定義したところは見当たらない．しかし，このことは第 3 章の p.64，共通ゲームの Sprauge-Grundy 理論の記述などから明らかである．ニム値 (Nim-value) という用語が初めて出てくるのは第 4 章 p.93 である．これは定義とは言いがたい．その直後で $\mathcal{P}$ 局面，$\mathcal{N}$ 局面という概念が出てくるので，冒頭の定義があるとすればそれ以降なのだが，明示的にそれを言っている箇所はない．

山のサイズ n で特定されるニム系の標準ゲームに対しては，p.92 で $\mathcal{G}(n)$ の記号が定義さ

れ，以後頻繁に使用される．著者は，それもって標準ニム値 $\mathcal{G}^+(G)$ が定義されたと考えているらしい．

訳書 p.451（原著 p.424） 原著誤り

原著では COMBINING TAME GAMES という囲みの中が，

> If *any* component is firm, so is the sum, and
> $$a^\alpha + b^\beta + \cdots = (a \overset{*}{+} b \overset{*}{+} \cdots)^{\alpha \overset{*}{+} \beta \overset{*}{+} \cdots}.$$
> If *all* components are fickle, so is the sum, and
> $$a^\alpha + b^\beta + \cdots = (a \overset{*}{+} b \overset{*}{+} \cdots)^{1 \overset{*}{+} \alpha \overset{*}{+} \beta \overset{*}{+} \cdots}.$$

COMBINING TAME GAMES

と記述されている．この等式には簡単な反例があり誤りであることが直ぐわかる．すなわち，前者では $2^2 + 1^0 \neq (2 \overset{*}{+} 1)^{2 \overset{*}{+} 0} = 3^2$，後者では $1^0 \neq 1^{1 \overset{*}{+} 0} = 1^1$ である．

訂正は容易で，和の属性が堅気である前者ではミゼールニム値を標準ニム値 $(a \overset{*}{+} b \overset{*}{+} \cdots)$ と等しくすればよく，和の属性が浮気である後者では，標準ニム値 $(a \overset{*}{+} b \overset{*}{+} \cdots)$ は 0 または 1 で，対応するミゼールニム値を 1 または 0 とするには，$(1 \overset{*}{+} a \overset{*}{+} b \overset{*}{+} \cdots)$ とすればよい．したがって，訳書をそのように修正した．なお，原書のこの誤りは A. Siegel も指摘しているように，その初版から第 2 版への改定過程で生じたものと思われる．この誤りには当初どのように訂正するのが適切なのかだいぶ悩まされたが，最終的に得た結論は初版と一致していることを確認して安堵したのであった．

堅気成分を含む和の属性が堅気であり，すべての成分が浮気の和の属性が浮気である，という記述の正しいことは，ニムの場合は容易に確認できる．浮気と堅気はこの章の冒頭で，サイズ 2 以上の山は堅気，シングルトンは浮気と定義されている．したがって，堅気＋堅気＝堅気，堅気＋浮気＝堅気，浮気＋浮気＝浮気は明らかだ．

訳書 p.457（原著 p.429) 忍び取りゲームと蛇ゲーム

忍び取りゲーム $\cdot$**31** とは，列の端から 1 個ずつ，最後は 2 個取ることも許すゲーム．蛇ゲーム $\cdot$**73** とは，列のどこからでも 1 個は取れるが，隣り合った 2 個は列の内部から取れ，また最後に残った 2 個も取れるゲーム．

訳書 p.461（原著 p.432) 反抗的ゲームと不安なゲーム

選択肢が $0^1, 0^0, a^a, b^b, \ldots$ か，または $1^0, 1^1, a^a, b^b, \ldots$ $(a, b, \cdots \geq 2)$ であるゲームは反抗的 (restive) であると言っている．すでに，p.450 において反抗的 (restive) の "定義" があり，ゲームのニム値 g^γ について，g は 0 か 1 で，γ は 2 以上，すなわち，$0^2, 0^3, \ldots$ または $1^2, 1^3, \ldots$ のいずれかでなければならないとされたが，それは必要条件であって，ここで選択肢の条件によって定義される．

$G = \{0^1, 0^0, a^a, b^b, \ldots\}$ とすると，G の属性 g^γ は $g = \mathrm{mex}(0, a, b, \ldots) = 1$, $\gamma = \mathrm{mex}(1, 0, a, b, \ldots) \geq 2$ であるから，これは p.450 の意味で反抗的である．また，$G =$

$\{1^0, 1^1, a^a, b^b, \ldots\}$ とすると，属性 g^γ は $g = \mathrm{mex}(1, a, b, \ldots) = 0, \gamma = \mathrm{mex}(1, 0, a, b, \ldots) \geq 2$ であるから，これも p.450 の意味で反抗的である．

反抗的の定義は p.453 で拡張され，ある条件をみたせば，野生の選択肢も許される（そのため，反抗的でも半分飼いならされていないものが生ずる）．

これに対して，不安な (restless) ゲームの定義はここでなされ，選択肢はすべて飼いならされていて，それらの属性が $1^0, 0^0, a^a, b^b, \ldots$ か，または $0^1, 1^1, a^a, b^b, \ldots$ $(a, b, \cdots \geq 2)$ であるゲームとされる．その結果，不安なゲームの属性 g^γ は $g \geq 2, \gamma = 0$ または 1 となる．

訳書 p.466（原著 p.437） 整数の分割

下から 3 行目の右の式には原著初版の改版中に生じた誤植 $R_{2^k a} + R_{2^i b}$ があり，細かい文字 i を ℓ に修正した．

定規分割ゲームには整数 $n = 2^k d$ (d は奇数) を 2 つに分割する手があり，それに 2 つのタイプがあることを $n = 88 = 2^3 \cdot 11$ を例に解説しよう．(1) $d = 11$ を奇数 a=5 と偶数 6 に分割し，$72 = 2^3(5+6) = 2^3 \cdot 5 + 2^4 \cdot 3$ とする方法が右の式 $R_{2^k a} + R_{2^\ell b}$ に対応する．(2) 偶数 $2 \cdot 11 = 22$ を 2 つの奇数 $a = 7$ と $b = 15$ に分割し，$88 = 2^2 \cdot 7 + 2^2 \cdot 15$ とする方法が中の式 $R_{2^j a} + R_{2^j b}$ に対応する．不等式 $j < k < \ell\,(j = 2, k = 3, \ell = 4)$ が理解できるでしょう．

訳書 p.467（原著 p.437） 原著誤り

定規分割 $\mathrm{H}_3, \mathrm{H}_5, \mathrm{H}_7, \ldots$ の属性は原著で 1^{31} と記されるが，H_3 は反抗的であると述べているので p.449 の短縮形の約束により，訳書では 1^3 に修正した（図 13.1 の修正と関連する）．

訳書 p.473（原著 p.442） 原著誤り

Dim^- の属性列の中で原著に 1^{46}, 2^{13} とあるのを，それぞれ 2^{46}, 1^{13} に修正した（根拠は第 1 巻 p.109 のニム列）．

訳書 p.477（原著 p.446） 原著誤り

2 行目左から 3 番目のケイルス局面の属性が原著では 2^{30} であるが，表 13.4 には見出せない．2 行下の飼いならし可能な属性の記法と整合するので，訳書では 2^{20} に修正した（原著初版と一致）．

訳書 p.478（原著 p.448） 原著誤り

下から 2 行目，長さの並び $5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1$ に対応する局面を，原著では $\mathrm{D}(5) \cdot \mathrm{E}(4)$ と表しているが，並び $4 \cdot 4 \cdot 1$ は $\mathrm{E}(4)$ ではなかろう．訳書ではこの部分を $\mathrm{D}(5) \cdot \mathrm{D}(4, 1)$ に修正した．