まえがき

本書は非発散型の非線形二階楕円型・放物型偏微分方程式の適切な弱解である粘性解の入門書である．想定している読者は，多変数の微分積分を理解し，数学系学科のルベーグ積分・位相空間等の知識を持った 4 年生から修士課程の学生である．しかしながら，これは十分条件である．専門的な知識は最小限になるように工夫したつもりなので，数理ファイナンスをはじめとする，確率解析の応用または，幾何学を勉強するうちに，「粘性解」という単語をどこかで目にした方にも気軽に読めるテキストを目指した．なおかつ，数学的厳密性は失わないよう心掛けた．また，粘性解理論を速く概観するために，数学的にやや難しい証明は付録にまとめた．

粘性解の概念は，1980 年代初頭に M. G. Crandall と P.-L. Lions によって非発散型一階偏微分方程式の弱解として導入された．様々な方程式に対して，粘性解の一意性が示されると共に，一般的な仮定の下で，粘性解の存在や安定性も確かめられ，適切な弱解として認識されてきた．一方，確率最適制御・微分ゲームに現れる具体的に係数や非斉次項が与えられている Bellman 方程式・Isaacs 方程式の期待される解の候補には表現公式があり，それが唯一の粘性解であることも知られていた．しかし，一般の非発散型二階楕円型・放物型偏微分方程式に対する，表現公式を用いない一意性の証明が知られたのは 1980 年代末である．その後，様々な分野に応用が広がり，現在も盛んに研究されている．

本書では，粘性解理論の初期の最大の関心事であった比較原理に焦点を絞った．その理由は，最も重要な結果である比較原理の証明を初心者用に一冊にまとめて書いてある和書がないからである．概略は，[18] の石井仁司著の第 II 部第 3 章にある．英文なら，[7] は研究者には充分満足いくテキストであるが，Aleksandrov の定理 (凸関数のほとんどいたる所での二階微分可能性) の証明等

は，初心者にはもう少し説明が必要と思われる．

比較原理に焦点を当てたもう一つの理由がある．通常，偏微分方程式に対して「構造条件」の仮定の下で，行列不等式を満たす“二階微分”を用いて，比較原理の証明をする．一方，本質的には同じだが，上限・下限近似を用いる別証明がある．まだ広く知られていないこの証明を紹介するのは，他の偏微分方程式の研究者に理解しやすいと思われるからと，そこで用いられる上限・下限近似の興味深い性質がまとめてあるテキストがないからである．

英文の粘性解のテキストとしては，Crandall-Ishii-Lions による概説論文 [8] が著名である (拙著 [16] も参照してほしい)．また，重要な応用である，確率最適制御に関しては，Fleming-Soner の [11] と Morimoto の [20]，平均曲率流への応用は Giga の [12] がある．最近，注目されている無限大 Laplacian に関しては Aronsson-Crandall-Juutinen の [1] もあげておく．さらに，主に一階の偏微分方程式に関するテキストには，Bardi-Capuzzo Dolcetta の [2] と Barles の [3] があり，それぞれ特徴があって興味深い．

本書の性質上，よく知られた結果の原著論文は引用しなかったので，[8] の参考文献を参照してほしい．ただし，まだ多くの専門家にも知られていない結果は「あとがき」に引用した．

本書を読んで，粘性解理論に関心を持つ若い方が出現してくれれば，望外の幸いである．

2016 年 11 月

小池茂昭